PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE VALENCIA

JUNIO – 2018

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se tiene el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores del parámetro a para los cuales el sistema es compatible determinado.

b) Las soluciones del sistema cuando $a = 3$.

c) Las soluciones del sistema para los valores de a que lo hacen compatible indeterminado.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1-a \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ -a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

$$\underline{Para\ a \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$b)$

Para $a = 3$ el sistema es $\begin{cases} y - z = -2 \\ -x + z = 5 \\ -3x + y - z = 1 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-5+1+2+5}{-3} = \frac{3}{-3} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1+6-15+2}{-3} = \frac{9-15}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{2-15+1}{-3} = \frac{3-15}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4.$$

$$\underline{Solución: x = -1,\ y = 2,\ z = 4.}$$

$c)$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para $a = 0$ el sistema es $\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 5 \\ y - z = 1 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 5 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$\underline{Solución: x = -5 + \lambda,\ y = 1 + \lambda,\ z = \lambda,\ \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Dados los puntos $A(-1,2,\lambda), B(2,3,5)\ y\ C(3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener *razonadamente*, *escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C.

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$.

----

a)

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,3,5) - (-1,2,\lambda)] = (3,1,5-\lambda)$.

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(3,5,3) - (-1,2,\lambda)] = (4,3,3-\lambda)$.

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(3,5,3) - (2,3,5)] = (1,2,-2)$.

Por ser el segmento AC la hipotenusa del triángulo rectángulo, el ángulo recto es el vértice B, por lo cual, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ tienen que ser perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (3,1,5-\lambda) \cdot (1,2,-2) = 3 + 2 - 10 + 2\lambda = 0;$

$2\lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{2}$.

$$\underline{El\ triángulo\ es\ rectángulo\ en\ B\ para\ \lambda = \tfrac{5}{2}}.$$

b)

Cuando $\lambda = 6$ es $\overrightarrow{AB} = (3,1,-1)$ y $\overrightarrow{AC} = (4,3,-3)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |-3i - 4j + 9k - 4k + 3i + 9j| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |5j + 5k| = \frac{5}{2} \cdot |j + k| = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{2} = \underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u^2}.$$

$c)$

Para $\lambda = 6$ es $\overrightarrow{AB} = (3, 1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (4, 3, -3)$.

Considerando, por ejemplo, el punto $B(2, 3, 5)$, la ecuación del plano pedido es la siguiente:

$$\pi\left(B;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-3(x-2) - 4(y-3) + 9(z-5) - 4(z-5) + 3(x-2) + 9(y-3) = 0;$$

$$5(y-3) + 5(z-5) = 0;\ \ y - 3 + z - 5 = 0.$$

$$\underline{\pi \equiv y + z - 8 = 0}.$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El dominio y las asíntotas de la función $f(x)$.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x)$.

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto para los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 - x = 0;\;\; x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \;\Rightarrow R - \{0, 1\}}$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2 - x} = 0 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 0\ (Eje\ X)}\,.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = 0\ (Eje\ Y), x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-2x}{(x^2-2)^2} = 0;\;\; 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

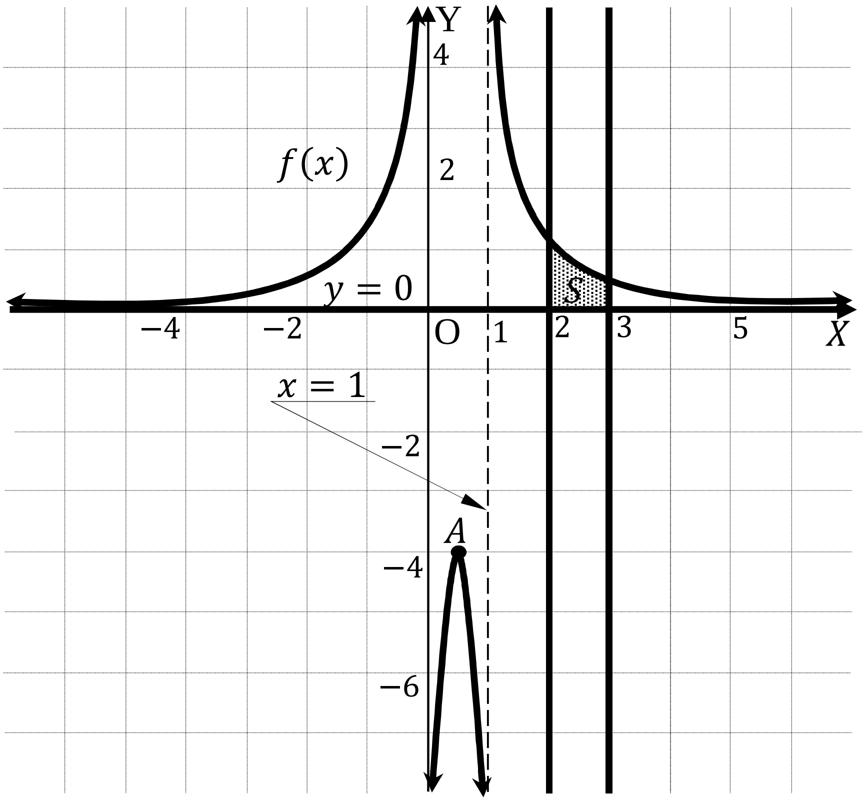
$$Para\ x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)}.$$

$$Para\ x > \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)}.$$

$c)$

Para ilustrar la resolución de este apartado se hace una representación gráfica, aproximada, de la función, para lo cual se tiene en cuenta que la función tiene un máximo relativo para $x = \frac{1}{2}$, como puede deducirse de los periodos de crecimiento y de decrecimiento.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1-2}{4}} = -4 \Rightarrow Máximo: A\left(\frac{1}{2}, -4\right).$$



La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_2^3 f(x) \cdot dx = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} \cdot dx. \qquad (*)$$

$$I = \int \frac{1}{x^2 - x} \cdot dx.$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 2. \qquad x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2).$$

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx}{x(x+4)} = \frac{(M+N)x + (-M)}{x^2 - x} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M + N = 0 \\ -M = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M = -1; N = 1.$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - x} = \int \left(\frac{M}{x} + \frac{N}{x-1}\right) \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) \cdot dx = -Lx + L|x - 1| + C =$$

$$= L\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

Sustituyendo este valor de la integral indefinida en (*):

$$S = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - x} \cdot dx = \left(L\left|\frac{3-1}{3}\right|\right) - \left(L\left|\frac{2-1}{2}\right|\right) = L\,\frac{2}{3} - L\,\frac{1}{2} = L2 - L3 - L1 + L2 =$$

$$= 2L2 - L3 - 0 = L\,\frac{4}{3}.$$

$$\underline{S = L\,\frac{4}{3}\;u^2 \cong 0{,}29\;u^2.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 + 2A = 3I$, donde I es la matriz identidad. Calcular *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a y b para los cuales $A^{-1} = aA + bI$.

b) Los valores de a y β para los cuales $A^4 = aA + \beta I$.

c) El determinante de la matriz $2B^{-1}$, sabiendo que B es una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante es 2.

----

a)

$$A^2 + 2A = 3I;\ \ A \cdot (A + 2I) = 3I;\ \ A \cdot \left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I.$$

Por definición de inversa de una matriz: $A \cdot A^{-1} = I$:

$$A \cdot \left(\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}I.$$

Como se nos dice que $A^{-1} = aA + bI \ \Rightarrow\ \underline{a = \frac{1}{3}\ y\ b = \frac{2}{3}}$.

b)

$$A^2 + 2A = 3I;\ \ A^2 = 3I - 2A \Rightarrow A^4 = A^2 \cdot A^2 = (3I - 2A) \cdot (3I - 2A).$$

$$A^4 = 9I^2 - 6IA - 6AI + 4A^2 = 9I - 12A + 4A^2 =$$

$$= 9I - 12A + 4 \cdot (3I - 2A) = 9I - 12A + 12I - 8A = -20A + 21I.$$

Como se nos dice que $A^4 = aA + \beta IbI \ \Rightarrow\ \underline{a = -20\ y\ \beta = 21}$.

c)

$$|B| = 2.$$

Por ser B una matriz cuadrada de orden 3 es:

$$|2B^{-1}| = 2^3 \cdot |B^{-1}| = 8 \cdot \left|\frac{1}{B}\right| = 8 \cdot \frac{1}{|B|} = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

$$\underline{|2B^{-1}| = 4}.$$

****

2º) Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$, se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La recta s que corta a la recta r, pasa por el punto A, y es perpendicular a r.

b) La distancia del punto A a la recta r.

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $P(3,-1,0)$ y es perpendicular a la recta r.

----

a)

Un punto y un vector director de r son $C(3,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,-3,-2)$.

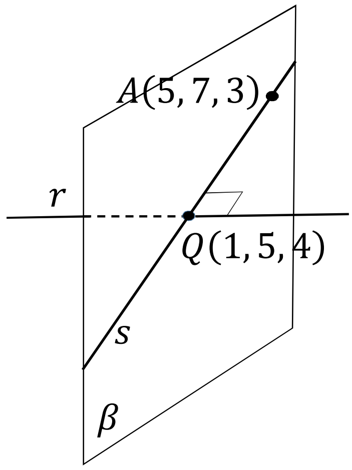
El haz de planos perpendiculares a r es $\alpha \equiv x - 3y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano β que contiene al punto $A(5,7,3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x - 3y - 2z + D = 0 \\ A(5,7,3) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 - 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3 + D = 0;\ \ 5 - 21 - 6 + D = 0;$$

$5 - 27 + D = 0;\ -22 + D = 0 \Rightarrow D = 22 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta \equiv x - 3y - 2z + 22 = 0.$



La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de r y β es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x - 3y - 2z + 22 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 + \lambda - 3(-1 - 3\lambda) - 2(-2\lambda) + 22 = 0;$$

$3 + \lambda + 3 + 9\lambda + 4\lambda + 22 = 0;\ \ 14\lambda + 28 = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$

$$\left.\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 3 - 2 = 1 \\ y = -1 - 3 \cdot (-2) = 5 \\ z = -2 \cdot (-2) = 4 \end{cases}\right\} \Rightarrow Q(1,5,4).$$

Un vector director de la recta pedida s es $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{QA} = [A - Q] = (4,2,-1)$.

$$s \equiv \begin{cases} x = 5 + 4\mu \\ y = 7 + 2\mu. \\ z = 3 - \mu \end{cases}$$

$b)$

Por ser perpendiculares las rectas r y s, la distancia del punto A a la recta r es equivalente al módulo del vector $\overrightarrow{QA}$:

$$d(A, r) = \left|\overrightarrow{QA}\right| = \sqrt{(5-1)^2 + (7-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}.$$

$$\underline{d(A, r) = \sqrt{21}\ unidades.}$$

$c)$

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $P(3, -1, 0)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x - 3y - 2z + D = 0 \\ P(3, -1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 - 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + D = 0;\ \ 3 + 3 + D = 0;$$

$$6 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \Rightarrow \pi \equiv x - 3y - 2z - 6 = 0.$$

La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\gamma \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \gamma) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x - 3y - 2z - 6 = 0$ y al punto $B(1, 1, 1)$:

$$d(B, \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 3 - 2 - 6|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{14}} = \frac{10\sqrt{14}}{14} = \underline{\frac{5\sqrt{14}}{7}\ unidades.}$$

****

3º) Se divide un alambre de longitud 100 cm en dos partes. Con una de ellas, de longitud x, se construye un triángulo equilátero y con la otra, de longitud $100 - x$, se construye un cuadrado. Se pide obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

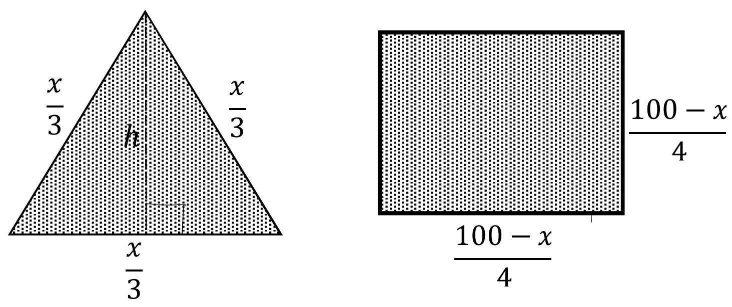
a) La función de variable x que expresa la suma de las áreas del triángulo equilátero y del cuadrado, siendo $0 \leq x \leq 100$.

b) El valor de la variable x en el intervalo $[0, 100]$ para el cual dicha función (suma de las áreas en función de x obtenida en el apartado anterior) alcanza su mínimo valor.

c) El valor de la variable x en el intervalo $[0, 100]$ para el cual dicha función alcanza su máximo valor. Interpretar el resultado obtenido.

----

a)



$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{36}} = \sqrt{\frac{3x^2}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

$$S_T(x) = S_t(x) + S_c(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}x + \left(\frac{100-x}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}x^2 + \frac{10.000 - 200x + x^2}{16} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}x^2 + 90.000 - 1.800x + 9x^2}{144}.$$

$$\underline{S_T(x) = \frac{1}{144} \cdot \left[\left(4\sqrt{3} + 9\right)x^2 - 1.800x + 90.000\right].}$$

b)

Para que una función tenga un mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'_T(x) = \frac{1}{144} \cdot \left[2\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 1.800\right].$$

$$S'_T(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{144} \cdot \left[2\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 1.800\right] = 0;\;\; 2\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 1.800 = 0;$$

$$\left(4\sqrt{3} + 9\right)x - 900 = 0 \Rightarrow x = \frac{900}{4\sqrt{3}+9} = \frac{900 \cdot \left(4\sqrt{3} - 9\right)}{\left(4\sqrt{3}+9\right)\left(4\sqrt{3}-9\right)} = \frac{900 \cdot \left(4\sqrt{3} - 9\right)}{48 - 81} = \frac{900 \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{33} =$$

$= \frac{300\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)}{11}$.

Para justificar la condición de que se trata de un mínimo se tiene en cuenta que la condición necesaria anterior de mínimo no es suficiente: para que existe el mínimo es necesario que sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S_T''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{144}\cdot\left[2\left(4\sqrt{3}+9\right)\right] = \frac{4\sqrt{3}+9}{72} > 0 \Rightarrow Mínimo, c.q.j.$$

$$\underline{x = \frac{300\cdot\left(9-4\sqrt{3}\right)}{11}\ cm \cong 56{,}50\ cm.}$$

Por no tener más que una solución la primera derivada no existe la condición de máximo en el intervalo $(0, 100)$, por lo cual, el máximo tiene que darse en uno de los extremos del intervalo $[0, 100]$.

$$S_T(0) = \frac{1}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3}+9\right)\cdot 0^2 - 1.800\cdot 0 + 90.000\right] = \frac{90.000}{144} = 625.$$

$$S_T(100) = \frac{1}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3}+9\right)\cdot 100^2 - 1.800\cdot 100 + 90.000\right] =$$

$$= \frac{100}{144}\cdot\left[\left(4\sqrt{3}+9\right)\cdot 100 - 1.800 + 900\right] = \frac{25}{36}\cdot\left[\left(4\sqrt{3}+9\right)\cdot 100 - 900\right] =$$

$$= \frac{2.500}{36}\cdot\left(4\sqrt{3}+9-9\right) = \frac{625}{9}\cdot 4\sqrt{3} = 481{,}13.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ para\ x = 0.}$$

La interpretación geométrica es que no existe el triángulo y los 100 cm se utilizan para construir un cuadrado de 25 cm de lado.

****