PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE VALENCIA

JULIO – 2019

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se da el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+3z=a \\ x-2y+2z=5 \\ 3x-y+5z=a+1 \end{cases}$, donde a es un parámetro real. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a para los que el sistema es compatible determinado.

b) La solución del sistema cuando $a=-1$.

c) El valor de a para que el sistema tenga una solución (x, y, z) que verifique la ecuación $x+y+z=0$.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & a \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & a+1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix}=-20-3+18+4=-1\neq 0 \Rightarrow Ran\ M=3.$$

$$\underline{\forall a\in R \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

b)

Se resuelve por Cramer sin particularizar el parámetro:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ a+1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-10a-15+6(a+1)+2a}{-1}=\frac{-8a-15+6a+6}{-1}=\frac{-2a-9}{-1}=2a+9.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & a+1 & 5 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{50+6a+3(a+1)-45-4(a+1)-5a}{-1}=\frac{5+a-a-1}{-1}=\frac{4}{-1}=-4.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & a+1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-4(a+1)-a+6a+10}{-1}=\frac{-4a-4+5a+10}{-1}=\frac{a+6}{-1}=-a-6.$$

$$\underline{Solución\ para\ a=-1 \Rightarrow x=7,\ y=-4,\ z=-5}.$$

$c)$

Teniendo en cuanta la solución teórica del apartado anterior:

$x+y+z=0 \Rightarrow (2a+9)-4+(-a-6)=0;\ \ 2a+9-4-a-6=0;$

$a-1=0 \Rightarrow \ \underline{a=1}.$

****

2º) Se da el plano $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P(10, 0, 10)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La distancia del punto P al plano π.

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

----

a)

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(10, 0, 10)$ y al plano $\pi \equiv 2x + y + 2z - 8 = 0$:

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 10 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|20 + 0 + 20 - 8|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{32}{\sqrt{9}} = \underline{\frac{32}{3}\ unidades.}$$

b)

Los puntos de intersección del plano $\pi \equiv 2x + y + 2z = 8$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2x = 8 \rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0, 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow B(0, 8, 0).$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 2z = 8 \rightarrow z = 4 \Rightarrow C(0, 0, 4).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos.

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, 8, 0) - (4, 0, 0)] = (-4, 8, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0, 0, 4) - (4, 0, 0)] = (-4, 0, 4).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |32i + 32k + 16j| =$$

$$= |16i + 8j + 16k| = 8 \cdot |2i + j + 2k| = 8 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 8 \cdot \sqrt{9} = 24.$$

$$\underline{S_{ABC} = 24\ u^2}.$$

$c)$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que determinan. Los puntos P, A, B y C determinan los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y:

$$\overrightarrow{AP} = [P - A] = [(10, 0, 10) - (4, 0, 0)] = (6, 0, 10).$$

$$V_{PABC} = \frac{1}{6} \cdot \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP}\right] = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (192 + 320) = \frac{1}{6} \cdot 512.$$

$$\underline{V_{PABC} = \frac{512}{6}\ u^3 \cong 85{,}33\ u^3}.$$

****

3º) Se da la función h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) El dominio de la función h. Los límites $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ y $\lim_{x\to 0} h(x)$.

b) La asíntota de la curva $y = h(x)$.

c) La primitiva de la función h (es decir, $\int h\,(x)\cdot dx$) y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y = 0, x = 1, x = 5$ y la curva $y = h(x)$.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + 2x + 5 = 0;\ x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} \Rightarrow x \notin R \ \Rightarrow\ \underline{D(f) \Rightarrow R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \underline{+\infty}.$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \underline{-\frac{3}{5}}.$$

b)

La función $h(x)$ no tiene asíntotas verticales por no anularse su denominador para ningún valor real de x. Tampoco tiene asíntotas horizontales por ser finito el límite de la función cuando $x \to \pm\infty$: $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \infty$.

Una función racional tiene una asíntota oblicua cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tal como ocurre con $h(x)$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} \ \text{ y } \ n = \lim_{x\to\infty} [h(x) - mx], \text{ con } m \text{ finito y } m \neq 0.$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [h(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3-x^3-2x^2-5x}{x^2+2x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2-3}{x^2+2x+5} = -1.$$

$$\underline{\textit{Asíntota oblicua}: y = x - 1.}$$

$c)$

Para el cálculo del área pedida se tiene en cuenta que en el intervalo $(1, 5)$ todas las ordenadas de la función $h(x)$ son positivas.

$$S = \int_1^5 h(x) \cdot dx = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} \cdot dx.$$

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$A = \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} \cdot dx =$$

$$\begin{array}{rrrr|rrr} +x^3 & -x^2 & +5x & -3 & x^2 & +2x & +5 \\ \hline -x^3 & -2x^2 & -5x & & x & -1 & \\ \hline & -x^2 & & -3 & & & \\ & +x^2 & +2x & +5 & & & \\ \hline & & 2x & +2 & & & \end{array}$$

$$= \int \left(x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\right) \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 + 2x + 5 = t \\ (2x+2) \cdot dx = dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{t} \cdot dt =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + Lt = \frac{x^2}{2} - x + L(x^2 + 2x + 5) = A.$$

$$S = \int_1^5 h(x) \cdot dx = \int_1^5 \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} - x + L(x^2 + 2x + 5)\right]_1^5 =$$

$$= \left[\frac{5^2}{2} - 5 + L(5^2 + 2 \cdot 5 + 5)\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1 + L(1^2 + 2 \cdot 1 + 5)\right] =$$

$$= \frac{25}{2} - 5 + L40 - \frac{1}{2} + 1 - L8 = 12 - 4 + L\frac{40}{8} = 8 + L5.$$

$$\underline{S = (8 + L5)\ u^2 \cong 9{,}61\ u^2}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) Los valores de a para los que la ecuación matricial $AX = aX$ solo admite una solución.

b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $AX = 5X$.

c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $AX = 2X$ y, sin calcular la matriz A^{100}, obtener el valor de β tal que $A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$\left.\begin{array}{r} AX = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} \\ aX = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow AX = aX \Rightarrow \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y = ax \\ -x + 6y = ay \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} (1 - a)x + 4y = 0 \\ -x + (6 - a)y = 0 \end{array}\right\}.$$

Se ha obtenido un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas. Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema tendrá solución única (trivial) cuando el determinante de la matriz de coeficientes tenga rango 2, es decir, que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 - a & 4 \\ -1 & 6 - a \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 - a & 4 \\ -1 & 6 - a \end{vmatrix} = (1 - a)(6 - a) + 4 = 6 - a - 6a + a^2 + 4 = 0;$$

$$a^2 - 7a + 10 = 0;\ \ a = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5.$$

$\underline{La\ ecuación\ matricial\ AX = aX\ tiene\ solución\ \text{única}\ \forall a \in R - \{2, 5\}}.$

b)

Para $a = 5$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x + y = 0.$

$\underline{Solución: x = \lambda, y = \lambda, \forall \lambda \in R}.$

$c)$

Para $a = 2$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} -x+4y=0 \\ -x+4y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -x+4y=0.$

$\underline{Solución: x = 4\lambda, y = \lambda, \forall\lambda \in R, en\ particular\ para\ \lambda = 1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}.$

Sabiendo que $AX = 2X \Rightarrow A = 2$, por lo cual:

$A^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 2^{100} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\beta = 2^{100}}.$

****

2º) Se dan en el espacio la recta $r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi \equiv x + 2y + 3z = 6$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros $\alpha\ y\ \beta$.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6\ y\ \beta = 3$.

c) La ecuación del plano que pasa por $O(0,0,0)$ y que no corta al plano π.

----

a)

La recta r dada por dos ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-a}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -4x + 4a = -y \\ -4z = \beta y \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x - y - 4a = 0 \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 4x - y = 4a \\ \beta y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & \beta & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2. -- Rango M =2, Rango M' = 3 $\Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3. -- Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12\beta - 4 - 32 = 12\beta - 36 = 0;\ \ \beta - 3 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \beta = 3$.

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \beta \neq 3 \\ a \in R \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow r\ y\ \pi\ son\ secantes.}$$

$$Para\ \beta = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se determina el rango de M' por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 4a \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 4a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 4F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & 4a - 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \to F_3 = -3F_2 \Rightarrow Rang\ M' = 2 \\ a \neq 6 \Rightarrow Rang\ M' = 3 \end{cases}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \beta = 3 \\ a = 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow r\ está\ contenida\ en\ \pi.}$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \beta = 3 \\ a \neq 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow r\ es\ paralela\ a\ \pi.}$$

$b)$

Teniendo en cuenta el apartado anterior:

$$\underline{Para\ a = 6\ y\ \beta = 6 \Rightarrow r\ está\ contenida\ en\ \pi \Rightarrow D(r, \pi) = 0}$$

$c)$

Si dos planos no se cortan es que son paralelos.

El haz de planos γ paralelos a π es $\gamma \equiv x + 2y + 3z + D = 0$ y el plano δ pedido pertenece al haz γ y contiene al punto $O(0, 0, 0)$:

$$\underline{\delta \equiv x + 2y + 3z = 0}.$$

****

3º) Un proyectil está unido al punto $A(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y=4-x^2$ de extremos $B(-2,0)$ y $C(2,0)$. Obtener *razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $P(x,4-x^2)$ de la curva $y=4-x^2$ y el punto $A(0,2)$.

b) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $A(0,2)$ para $-2\leq x\leq 2$.

c) Los puntos de la curva $y=4-x^2$ a menor distancia del punto $A(0,2)$ para $-2\leq x\leq 2$.

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y=4-x^2$ e $y=2-|x|$ cuando $-2\leq x\leq 2$.

----

a)

La función $h(x)$ que expresa la distancia entre los puntos $A(0,2)$ y $P(x,4-x^2)$ es la siguiente:

$$d(x)=\sqrt{(x-0)^2+(4-x^2-2)^2}=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}=$$

$$=\sqrt{x^2+4-4x^2+x^4}=\sqrt{x^4-3x^2+4}.$$

$$\underline{d(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4},\ con-2\leq x\leq 2.}$$

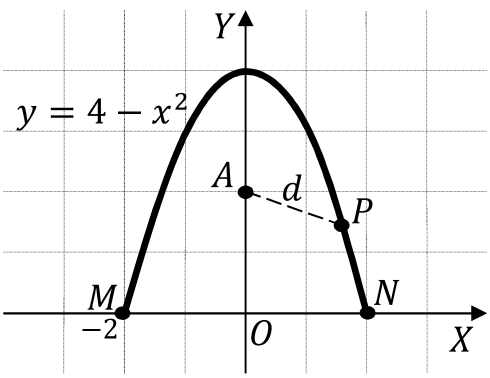
b)

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$d'(x)=\frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}=\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}.$$

$$d'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^4-3x^2+4}}=0;\ \ x(2x^2-3)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=\frac{-\sqrt{6}}{2}, x_3=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

En el caso que nos ocupa y, dada la complejidad de la segunda derivada, es más cómodo al cálculo de las sucesivas distancias para determinar la máxima.



Las distancias son las siguientes:

$$d(0)=\sqrt{4}=2.$$

Por ser $d(x)$ una función par:

$$d\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{6}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{6}{4} + 4} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 4} = \sqrt{\frac{16-9}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} \cong 1{,}23.$$

Los puntos de los extremos de la función son $M(-2, 0)\ y\ N(2, 0)$. La distancia del punto $A(0, 2)$ a estos puntos es la siguiente:

$$d_{\overline{AM}} = d_{\overline{AN}} = \sqrt{(0-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \cong 2{,}83.$$

$\underline{Los\ puntos\ más\ distantes\ de\ A(0, 2)\ son\ M(-2, 0)\ y\ N(2, 0).}$

$c)$

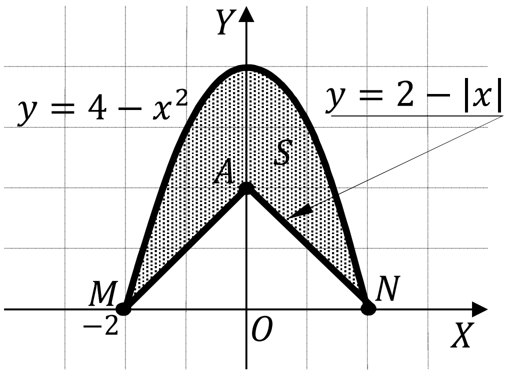
Los puntos de la curva de distancia mínima a $A(0, 2)$ son los siguientes:

$$y_{\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)} = 4 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 4 - \frac{6}{4} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

$\underline{Los\ puntos\ más\ próximos\ de\ A(0, 2)\ son\ P\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)\ y\ Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right).}$

$d)$

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si\ \ x < 0 \\ x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $y = 2 - |x|$ puede expresarse de la forma: $y = \begin{cases} 2 + x & si\ \ x < 0 \\ 2 - x & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.



La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

Teniendo en cuenta que son pares las funciones $y = 4 - x^2\ e\ y = 2 - |x|$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [(4 - x^2) - (2 - x)] \cdot dx =$$

$$= 2\int_0^2 (-x^2 + x + 2) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2\right) - 0\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4\right) = 2 \cdot \left(6 - \frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{20}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{22}{3}\ u^2 \cong 7{,}33\ u^2.}$$

****