# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDADES DE VALENCIA

# JUNIO – 2019

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solamente UNA de los dos OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de la opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

1º) Se dan la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$, que depende del parámetro real $a$, y una matriz B de orden 3 tal que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$, siendo $I$ la matriz identidad de orden 3. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a$) El rango de la matriz A en función del parámetro $a$ y el determinante de la matriz $2A^{-1}$ cuando $a = 1$.

$b$) Todas las soluciones del sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $a = -1$.

$c$) La comprobación de que B es invertible, encontrando $m\ y\ n$ tales que $B^{-1} = mB + nI$.

----------

$a$)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = a(a+1) - 2a(a-1) + 3a(a+1) - 2(a-1) =$$

$$= 4a(a+1) - 2a^2 + 2a - 2a + 2 = 4a^2 + 4a - 2a^2 + 2 = 2a^2 + 4a + 2 = 0;$$

$a^2 + 2a + 1 = 0;\ \ (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1.$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\underline{Para\ a \neq -1 \Rightarrow Rang\ A = 3;\ \ Para\ a = -1 \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

$|2\cdot A^{-1}| = 8\cdot\frac{1}{|A|} = 8\cdot\frac{1}{2a^2+4a+2} = \frac{4}{(a+1)^2}$. Para $a = 1$ es: $\frac{4}{(1+1)^2} = 1$.

$$\underline{Para\ a = 1 \Rightarrow |2\cdot A^{-1}| = 1}.$$

Nota: El factor 8 es debido a que cuando se multiplica una matriz por un número la matriz resultante es la que resulta de multiplicar por el número todos y cada uno de los elementos de la matriz; se tiene en cuenta que la matriz es de orden 3 y que el determinante de una matriz queda multiplicado por un número cuando se multiplican por ese número todos los elementos de una de sus líneas.

$b)$

Para $a = -1 \Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matriz ampliada es $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo rango es 2 por tener las dos primeras filas proporcionales.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius es sistema es compatible indeterminado con un parámetro por ser la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz ampliada de uno.

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x - z = -1 \\ -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{array}\right\}$, que a efectos de resolución es equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} x - z = -1 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{array}\right\}$, compatible indeterminado. Haciendo $z = \lambda$:

$$x = -1 + \lambda;\ \ 2y = -3x - z = 3 - 3\lambda - \lambda = 3 - 4\lambda;\ \ y = \frac{3}{2} - 2\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -1 + \lambda,\ y = \frac{3}{2} - 2\lambda,\ z = \lambda,\ \forall\lambda \in R.}$$

$c)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Se sabe que $B^2 = \frac{1}{3}I - 2B$. Operando adecuadamente, por ejemplo de la forma siguiente:

$$B^2 + 2B + I = \frac{1}{3}I + I = \frac{4}{3}I;\ \ (B+I)^2 = \frac{4}{3}I;\ \ B + I = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot I;$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot I - I = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)\cdot I = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)\cdot I = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\cdot I.$$

$$|B| = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot |I| = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \cdot 1 = \frac{2\sqrt{3}-3}{3} \neq 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ matriz\ B\ es\ invertible}.$$

Por otra parte: $B^2 + 2B = \frac{1}{3}I$; $B \cdot (B + 2I) = \frac{1}{3}I$; $B \cdot (3B + 6I) = I$.

Sabiendo que $B \cdot B^{-1} = I \Rightarrow 3B + 6I = B^{-1}$.

Como se pide determinar $m\ y\ n$ tales que $B^{-1} = mB + nI$, es evidente que:

$$\underline{m = 3\ y\ n = 6}.$$

**********

2º) Consideramos en el espacio las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a$) La ecuación del plano que contiene a las rectas $r\ y\ s$.

$b$) La recta que pasa por el punto $P(0, -1, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r$.

$c$) El valor que deben tener los parámetros reales $a\ y\ b$ para que la recta $s$ esté contenida en el plano $\pi \equiv x - 2y + az = b$.

----------

$a$)

La expresión de $r$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de $r$ son $A(0, 3, 3)\ y\ \overrightarrow{v_r} = (1, 1, 2)$.

Un punto y un vector director de $s$ son $B(0, -1, 2)\ y\ \overrightarrow{v_s} = (1, 1, 2)$. ( Nótese que las rectas $r\ y\ s$ son paralelas o coincidentes).

Para diferenciar el caso se comprueba si el punto $A(0, 3, 3) \in r$ satisface la ecuación de la recta $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$: $0 \neq 3 + 1 \Rightarrow A \notin s \Rightarrow \underline{r\ y\ s\ son\ paralelas}$.

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (0, -4, -1)$.

La expresión general del plano es: $\pi(A;\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{AB}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$-x - 4(z - 3) + 8x + (y - 3) = 0;\ \ 7x - 4z + 12 + y - 3 = 0.$

$$\underline{\pi \equiv 7x + y - 4z + 9 = 0}.$$

$b$)

El haz de planos perpendiculares a $r$ es $\beta \equiv x + y + 2z + D = 0$.

De todos los infinitos plano del haz $\beta$, el plano $\alpha$ que contiene al punto $P(0, -1, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z + D = 0 \\ P(0, -1, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 1 + 2 \cdot 2 + D = 0;\ 3 + D = 0 \Rightarrow D = -3.$$

$\alpha \equiv x + y + 2z - 3 = 0.$

El punto $Q$ de intersección de la recta $r$ y el plano $\alpha$ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x + y + 2z - 3 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + (3 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0;$$

$\lambda + 3 + \lambda + 6 + 4\lambda - 3 = 0;\ \ 6\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow Q(-1, 2, 1).$

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{QP} = [P - Q] = (1, -3, 1).$

La recta pedida es: $\underline{t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 - 3\mu \\ z = 2 + \mu \end{cases}}.$

$c)$

Una recta está contenida en un plano cuando dos puntos de la recta están contenidos en el plano.

La expresión de la recta $s \equiv x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es $s \equiv \begin{cases} x = \delta \\ y = -1 + \delta \\ z = 2 + 2\delta \end{cases}.$

Dos puntos de la recta $s$ son $B(0, -1, 2)$ $y$ $C(1, 0, 4)$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + az = b \\ B(0, -1, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 - 2 \cdot (-1) + 2 \cdot a = b;\ \ 2a - b = -2. \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + az = b \\ C(1, 0, 4) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot a = b;\ \ 4a - b = -1. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 2a - b = -2 \\ 4a - b = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} -2a + b = 2 \\ 4a - b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow \underline{a = \tfrac{1}{2}}.$$

$$2a - b = -2;\ \ 2 \cdot \tfrac{1}{2} - b = -2;\ \ 1 - b = -2 \Rightarrow \underline{b = 3}.$$

**********

3º) Se considera la función $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a$) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función $f(x)$.

$b$) La representación gráfica de la curva $f(x)$.

$c$) El valor del parámetro $a$ para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ a la función $g(x) = f(x) + ax$.

$d$) El valor de las integrales indefinidas $I_1 = \int f(x) \cdot dx$ e $I_2 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx$.

----------

$a$)

Las asíntotas horizontales de una función son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x \cdot e^{-x^2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x \cdot e^{-x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ x = 0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales no tiene por ser $e^{x^2} \neq 0, \forall x \in R$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}. \qquad f'(x) = \frac{1 \cdot e^{x^2} - x \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{(1-2x^2) \cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}} = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-2x^2}{e^{x^2}} = 0; \;\; 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $D(f) \Rightarrow R$ y que $e^{x^2} > 0, \forall x \in R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)}.$$

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$

$$f''(x) = \frac{-4x \cdot e^{x^2} - (1-2x^2) \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{-4x - 2x \cdot (1-2x^2)}{e^{x^2}} = \frac{-4x - 2x + 4x^3}{e^{x^2}} = \frac{2x \cdot (2x^2-3)}{e^{x^2}}.$$

Conviene tener en cuenta que tanto $f(x)$ como $f''(x)$ son simétricas con respecto al origen, por ser $f(x) = -f(x)$ $y$ $f''(x) = -f''(x)$.

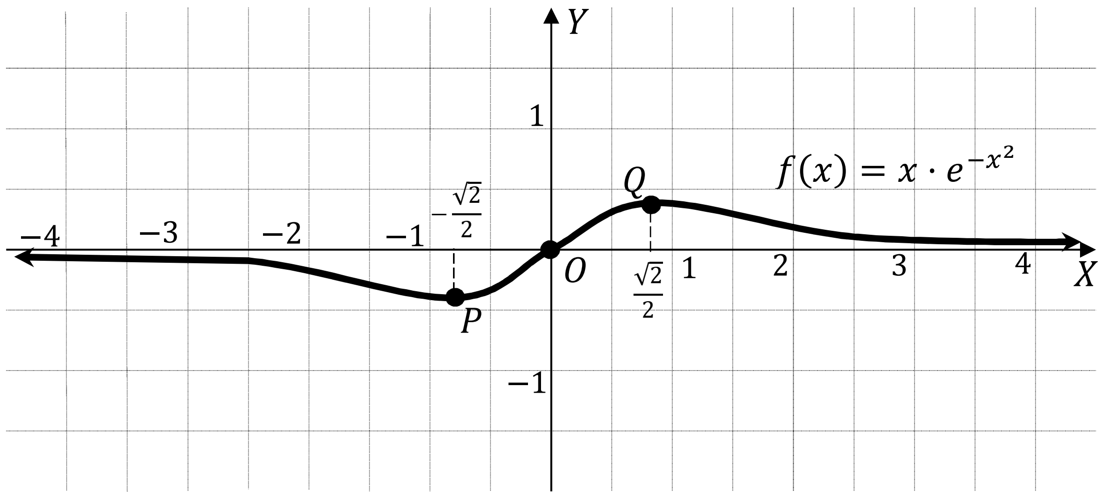
$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2} \cdot (1-3)}{\sqrt{e}} > 0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cong -0{,}71$.

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} = -\frac{\sqrt{2e}}{2e} \cong -0{,}43 \Rightarrow \underline{Mín.\ P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$

Por simetría: $\underline{Máx.\ Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2e}\right)}.$

$b)$

Teniendo en cuenta el apartado anterior y que la función pasa por el origen de coordenadas, la representación gráfica, aproximada de la función, es la siguiente:




$c)$

$g(x) = f(x) + ax = \frac{x}{e^{x^2}} + ax.$

La función $g(x) = \frac{x}{e^{x^2}} + ax$ cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 1]$ cuando:

$1. -$ Es continua en $[0, 1]$. Por ser $g(x)$ la suma de dos funciones continuas en R es continua en cualquier intervalo cerrado que se considere $\forall a \in R$.

$2. -$ Es derivable en $(0, 1)$. Por ser $g(x)$ la suma de dos funciones derivables en R es derivable en cualquier intervalo abierto finito que se considere $\forall a \in R$.

$3. -\ g(0) = g(1).$

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = \frac{1}{e^{1^2}} + a = \frac{1}{e} + a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{e} + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -\frac{1}{e}}.$$

$d)$ El valor de las integrales indefinidas $I_1 = \int f(x) \cdot dx$ e $I_2 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx$.

$$I_1 = \int f(x) \cdot dx = \int x \cdot e^{-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -x^2 = t \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot e^t + C = \underline{-\frac{1}{2} \cdot e^{-x^2} + C}.$$

$$I_2 = \int x \cdot e^{-x} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} \cdot dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C =$$

$$= \underline{-e^{-x}(x+1) + C}.$$

**********

OPCIÓN B

1º) Se da el sistema $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=a \end{cases}$, donde $a$ es un parámetro real. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a$) Los valores de $a$ para los que el sistema es compatible y los valores de $a$ para los que el sistema es incompatible.

$b$) Todas las soluciones del sistema cuando sea compatible.

$c$) La discusión de la compatibilidad y determinación del nuevo sistema deducido del anterior al cambiar el coeficiente 11 por cualquier otro número diferente.

----------

$a$)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro $a$ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_1 + 2F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - 7F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & a-28 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & a-14 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Para\ a = 14 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$\underline{Para\ a \neq 14 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b$)

Se resuelve para $a = 14$; el sistema resulta: $\left.\begin{matrix} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=14 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando, por ejemplo, la tercera ecuación y haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=4-\lambda \\ 3x+4y=5-5\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -3x-3y=-12+3\lambda \\ 3x+4y=5-5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=-7-2\lambda.$$

$x=4-\lambda-y=4-\lambda+7+2\lambda=11+\lambda.$

$$\underline{Solución: x=11+\lambda,\ \ y=-7-2\lambda,\ \ z=\lambda,\ \ \forall\lambda\in R.}$$

$c)$

Sea $b\neq 11$ el nuevo coeficiente que se considera.

La nuevas matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & b \end{pmatrix}\ y\ N'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & b & a \end{pmatrix}.$$

$$|N|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix}=4b+27+35-28-45-3b=b-11=0\Rightarrow b=11.$$

$$\underline{Para\ b\neq 11\Rightarrow Rang\ N=Rang\ N'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Rang\ N'\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & b & a \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} F_2\to F_2-3F_1 \\ F_3\to F_3-7F_1 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & b-7 & a-28 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_2\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & b-11 & a-14 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} b=11 \\ a=14 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ N=Rang\ N'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l} b=11 \\ a\neq 14 \end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ N=2;\ Rang\ N'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

**********

2º) Sea el plano $\pi \equiv 9x + 12y + 20z = 180$. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a$) Las ecuaciones de dos planos paralelos a $\pi$ que distan 4 unidades de $\pi$.

$b$) Los puntos A, B y C intersecciones del plano $\pi$ con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$c$) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos A, B y C.

----------

$a$)

La ecuación del haz de planos paralelos a $\pi \equiv 9x + 12y + 20z - 180 = 0$ es $\alpha \equiv 9x + 12y + 20z + D = 0$.

La distancia entre el plano $\pi$ y otro plano del haz $\alpha$ es $d = \frac{|D+180|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}}$.

Los planos pedidos son los siguientes:

$$4 = \frac{|D+180|}{\sqrt{9^2+12^2+20^2}} = \frac{|D+180|}{\sqrt{81+144+400}} = \frac{|D+180|}{\sqrt{625}} = \frac{|D+180|}{25}.$$

$$|D + 180| = 100 \Rightarrow \begin{cases} D_1 + 180 = 100 \rightarrow D_1 = -80 \\ D_2 + 180 = -100 \rightarrow D_2 = -280 \end{cases}.$$

$$\underline{\pi_1 \equiv 9x + 12y + 20z - 80 = 0 \ \ y \ \ \pi_2 \equiv 9x + 12y + 20z - 280 = 0}.$$

$b$)

$$\pi \equiv 9x + 12y + 20z = 180 \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow \begin{Bmatrix} y = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 9x = 180 \Rightarrow \underline{A(20,0,0)} \\ OY \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ z = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 12y = 180 \Rightarrow \underline{B(0,15,0)} \\ OZ \Rightarrow \begin{Bmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow 20z = 180 \Rightarrow \underline{C(0,0,9)} \end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0,15,0) - (20,0,0)] = (-20,15,0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,0,9) - (20,0,0)] = (-20,0,9).$$

El ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-20,15,0)\cdot(-20,0,9)}{\sqrt{(-20)^2+15^2}\cdot\sqrt{(-20)^2+9^2}} =$$

$$= \frac{400+0+0}{\sqrt{400+225}\cdot\sqrt{400+81}} = \frac{400}{\sqrt{625}\cdot\sqrt{481}} = \frac{400}{\sqrt{300.625}} = \frac{400}{548,29} = 0,7295 \Rightarrow \underline{\alpha = 43°\,9'\,9''}.$$

$c)$

El origen de coordenadas y los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{OA} = (20, 0, 0),\ \overrightarrow{OB} = (0, 15, 0)\ \ y\ \overrightarrow{OC} = (0, 0, 9).$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan.

$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot \left| \left| \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \right| \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |20 \cdot 15 \cdot 9| =$$

$= |10 \cdot 5 \cdot 9| = 450.$

$$\underline{V_{OABC} = 450\ u^3}.$$

**********

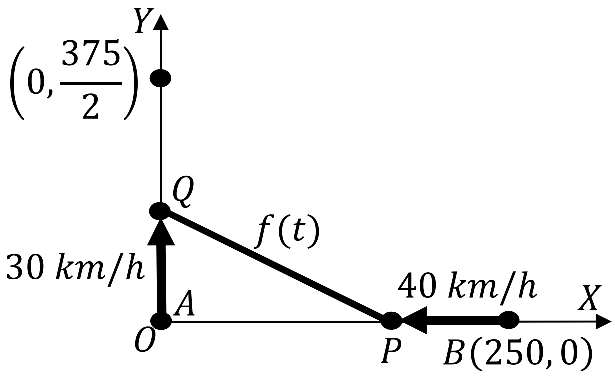
3º) Las coordenadas iniciales de los móviles A y B son $(0,0)$ $y$ $(250,0)$, respectivamente, siendo 1 km la distancia del origen de coordenadas a cada uno de los puntos $(1,0)$ $y$ $(0,1)$. El móvil A se desplaza sobre el eje OY desde su posición inicial hasta el punto $\left(0,\frac{375}{2}\right)$ con velocidad de 30 km/h y, simultáneamente, el móvil B se desplaza sobre el eje OX desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas con velocidad de 40 km/h. *Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado*:

$a$) La distancia $f(t)$ entre los móviles A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo $t$ en horas desde que comenzaron a desplazarse.

$b$) El tiempo $T$ que tardan los móviles en desplazarse desde su posición inicial a su posición final, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f$ a lo largo del trayecto.

----------

La representación gráfica de la situación se refleja, aproximadamente, en la figura adjunta, donde, al cabo de un tiempo $t$ el móvil A se encuentra en la posición P y el móvil B se encuentra en la posición Q.




$a$)

La función que expresa la situación de la distancia entre los móviles A y B es la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(250-40t,0)$ y $Q(0,30t)$.

$$f(t)=\sqrt{(30t)^2+(250-40t)^2}=\sqrt{900t^2+62.500-20.000t+1.600t^2}=$$

$$=\sqrt{2.500t^2-20.000t+62.500}=50\cdot\sqrt{t^2-8t+25}.$$

$$\underline{f(t)=50\cdot\sqrt{t^2-8t+25}}.$$

$b$)

$$T_A=\frac{e}{v}=\frac{\frac{375}{2}}{30}=\frac{375}{60}=\frac{75}{12}=\frac{25}{4}=6{,}25\ horas\Rightarrow \underline{T_A=6\ h\ y\ 15\ minutos}.$$

$$T_B=\frac{e}{v}=\frac{250}{40}=\frac{25}{4}=\frac{25}{4}=6{,}25\ horas\Rightarrow \underline{T_B=6\ h\ y\ 15\ minutos}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(t)=50\cdot\frac{2t-8}{2\cdot\sqrt{t^2-8t+25}}=50\cdot\frac{t-4}{\sqrt{t^2-8t+25}}.$$

$$f'(t)=0\Rightarrow 50\cdot\frac{t-4}{\sqrt{t^2-8t+25}}=0;\ \ t-4=0\Rightarrow t=4\ horas.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow t \in (0, 4\ horas)}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow t \in (4\ horas;\ 6\ horas\ 48\ minutos)}.$$

**********