

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

EXTRAORDINARIA – 2021

MATEMÁTICAS II

Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

1º) Se da el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$
, donde m es un parámetro

real. Se pide:

- La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m .
- La solución del sistema cuando $m = 1$.
- Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 2m - 4 - 15 - 5 + 24 + m = 0; \quad 3m = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Para $m \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$

$$\text{Para } m = 0 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } A' = 2.$$

Para $m = 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$

b)

Para $m = 1$ el sistema resulta
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{array} \right\}, \text{ que es compatible determi-}$$

nado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1-3-1+12}{3} = \frac{13-4}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1+15-6-1}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2-4-5+1}{3} = \frac{3-9}{3} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Solución: $x = 3, y = 3, z = -2.$

c)

El sistema es compatible indeterminado para $m = 0$, en cuyo caso el sistema resulta
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{array} \right\}, \text{ que es, además, homogéneo.}$$

Haciendo $z = \lambda$ y despreciando la tercera ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = -\lambda \\ x + y = -3\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = -4\lambda; \quad x = -\frac{4}{3}\lambda; \quad y = 2x + \lambda = -\frac{8}{3}\lambda + \lambda = -\frac{5}{3}\lambda.$$

Solución: $x = -\frac{4}{3}\lambda, y = -\frac{5}{3}\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.$

2º) Se dan las rectas $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi: x + my + z = 2$, que depende del parámetro real m . Obtener:

- La posición relativa de las rectas r y s .
- El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π .
- Los puntos A, B y C, intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$.

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda; y = 1 - \lambda; z = -1 + 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, 1, -1)$ y $\vec{v}_r = (1, -1, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(1, 0, 0)$ y $\vec{v}_s = (1, -1, 2)$.

Los vectores \vec{v}_r y \vec{v}_s son linealmente dependientes por ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s son paralelas o coincidentes. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Según que el punto $B \in s$ pertenezca o no a la recta r , las rectas serán coincidentes o paralelas, respectivamente.

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \\ B(1, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow \lambda = 1 \\ y = 0 \rightarrow \lambda = 1 \\ z = 0 \rightarrow \lambda = 1/2 \end{cases} \Rightarrow B \notin r.$$

Las rectas r y s son paralelas.

b)

Para que la recta r esté contenida en el plano π tienen que cumplirse las dos siguientes condiciones: el punto $A(0, 1, -1) \in s$ tiene que pertenecer también al plano π y, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen que ser perpendiculares.

$$\begin{cases} x + my + z = 2 \\ A(0, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow 0 + m - 1 = 2 \Rightarrow m = 3.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, m, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, -1, 2) \cdot (1, m, 1) = 1 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = 3.$$

La recta r está contenida en el plano π para $m = 3$.

c) Los puntos A, B y C, intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P(2, 2, 2)$.

Para $m = 2$ el plano π resulta ser $\pi: x + 2y + z = 2$.

Los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje X} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \\ \pi: x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \underline{A(2, 0, 0)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje Y} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right\} \\ \pi: x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 2; y = 1 \Rightarrow \underline{B(0, 1, 0)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Eje Z} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \\ \pi: x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow z = 2 \Rightarrow \underline{C(0, 0, 2)}.$$

El volumen de un tetraedro es un sexto del producto mixto de los tres vectores que lo determinan, en valor absoluto.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, 1, 0) - (2, 0, 0)] = (-2, 1, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, 2) - (2, 0, 0)] = (-2, 0, 2).$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [(2, 2, 2) - (2, 0, 0)] = (0, 2, 2).$$

$$V_{ABCP} = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |8 + 4| = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2 \Rightarrow \underline{V_{ABCP} = 2 u^3}.$$

3º) Dada la función $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

b) Las asíntotas y la gráfica de f .

c) La integral $I = \int f(x) \cdot dx$.

a)

La función está definida para cualquier valor real de x , por ser producto de dos función continuas en \mathbb{R} : $D(f) \Rightarrow \mathbb{R}$.

$f(-x) = -x \cdot e^{1-(-x)^2} = -x \cdot e^{1-x^2} = -f(x)$. La función es simétrica con respecto al origen.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} - x \cdot 2x \cdot e^{1-x^2} = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0; e^{1-x^2} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}; 1 - 2x^2 = 0;.$$

$$2x^2 = 1; x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por ser $f(x)$ continua en \mathbb{R} , las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y $(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ es:

$$f'(0) = e^{1-0} \cdot (1 - 0) = e > 0 \Rightarrow \text{Creciente}.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\text{Crecimiento: } x \in (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Decrecimiento: } x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) + e^{1-x^2} \cdot (-4x) =$$

$$= e^{1-x^2} \cdot (-2x + 4x^3 - 4x) = 2x \cdot e^{1-x^2} \cdot (2x^2 - 3).$$

$$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot (-2) < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{1-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2e}}{2} \Rightarrow \text{Máx. relativo } A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2}\right).$$

Por simetría con respecto al origen: Mín. relativo $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2e}}{2}\right)$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x \cdot e^{1-x^2}) = \pm(\infty \cdot e^{1-\infty}) = \pm \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \pm \frac{\infty}{\infty} = \pm \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

La recta $y = 0$ (eje X) es asíntota horizontal de la función.

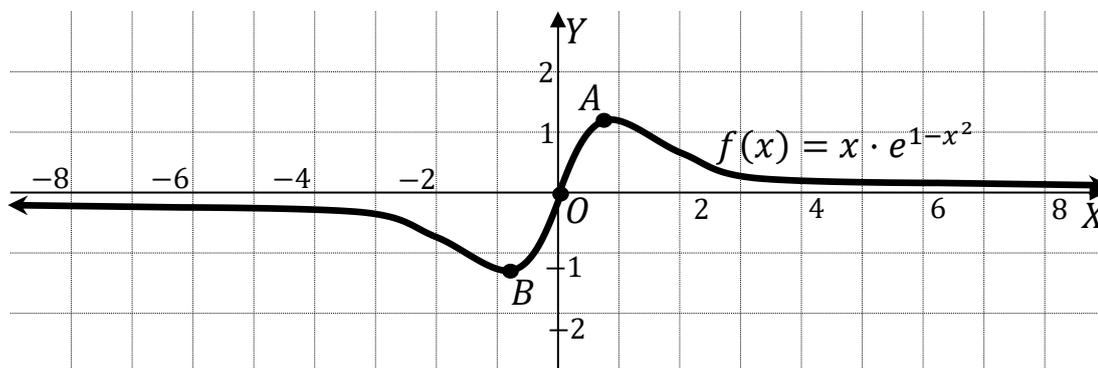
Asíntotas verticales:

No tiene asíntotas verticales por ser una función continua en \mathbb{R} .

Las asíntotas oblicuas:

$f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

Teniendo en cuenta lo anterior y que la función pasa por el origen, la representación gráfica de la función, aproximada, es la siguiente.



c)

$$I = \int f(x) \cdot dx = \int (x \cdot e^{1-x^2}) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \int e^t \cdot dt =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot e^t + C \Rightarrow \underline{\underline{I = \int (x \cdot e^{1-x^2}) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{1-x^2} + C.}}$$

4º) Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3)$. Obtend:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a .

b) Una matriz C tal que $AC = 16I$, siendo I la matriz identidad, cuando $a = 0$.

c) El rango de la matriz B y la discusión si el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} = 3a - 3(a^2 - 2) + 2 - 3a - (a^2 - 2) + 6 =$$

$$= 8 - 4(a^2 - 2) = 0; \quad 2 - (a^2 - 2) = 0; \quad a^2 = 4 \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 2.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 3.$$

Por contener A el menor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$:

$$\text{Para } \begin{cases} a = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } A = 2.$$

b)

$$A \cdot C = 16I; \quad A^{-1} \cdot A \cdot C = 16 \cdot A^{-1} \cdot I; \quad I \cdot C = 16 \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{C = 16 \cdot A^{-1}}.$$

Para $a = 0$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} (A|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} F_2 \rightarrow \frac{1}{2}F_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} F_1 \rightarrow F_1 - 2F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 4F_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} F_3 \rightarrow \frac{1}{8}F_3 \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = 16 \cdot A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 = -F_1 \\ F_3 = 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{Rang } B = 1}.$$

La matriz ampliada del sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 = -F_1 \\ F_3 = 2F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rang } B' = 1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$\text{Rang } B = \text{Rang } B' = 1 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I, con dos grados de libertad.}$

5º) Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(a, 3, -1)$, se pide:

a) La ecuación del plano π que contiene a P, Q y R cuando $a = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $a = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s .

c) Los valores de a para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

a)

Cuando $a = 1 \Rightarrow R(1, 3, -1)$.

Los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(1, 3, -1)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2, -1, 1) - (1, 1, 0)] = (1, -2, 1).$$

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = [(1, 3, -1) - (1, 1, 0)] = (0, 2, -1).$$

$$\pi(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}; P) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$2(x-1) + 2z - 2(x-1) + (y-1) = 0; 2z + (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv y + 2z - 1 = 0.}}$$

La distancia del origen de coordenadas al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv y + 2z - 1 = 0$:

$$d(O, \pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow \underline{\underline{d(O, \pi) = \frac{\sqrt{5}}{5} u.}}$$

b)

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1).$$

$$\text{Considerando el punto } P(1, 1, 0) \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Por ser paralelas las rectas r y s es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_s} = (1, -2, 1)$.

$$R(1, 3, -1) \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{1}.$$

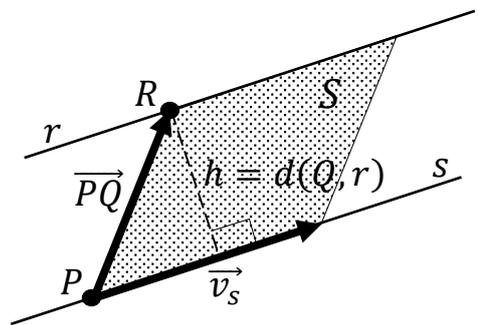
La distancia entre dos rectas paralelas es equivalente a la distancia de un punto de una de las rectas a la otra recta. Por ejemplo, la distancia de s al punto $R \in r$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

$$\left. \begin{array}{l} S = |\vec{v}_s \wedge \overline{PR}| \\ S = |\vec{v}_s| \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow |\vec{v}_s \wedge \overline{PR}| = |\vec{v}_s| \cdot h \Rightarrow h = d(R, s) = \frac{|\vec{v}_s \wedge \overline{PR}|}{|\vec{v}_s|}.$$

Aplicando la fórmula al punto R y a la recta s :

$$\begin{aligned} h = d(r, s) = d(R, s) &= \frac{|\vec{v}_s \wedge \overline{PR}|}{|\vec{v}_s|} = \\ &= \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{array} \right\|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|2i + 2k - 2i + j|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|j+2k|}{\sqrt{6}} = \\ &= \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow d(r, s) = \frac{\sqrt{30}}{6} u. \end{aligned}$$



c)

Los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(a, 3, -1)$ estarán alineados cuando los vectores \overline{PQ} y \overline{PR} sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales.

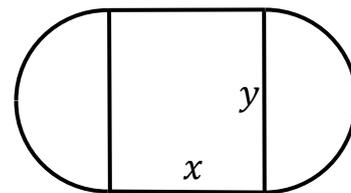
$$\overline{PQ} = (1, -2, 1).$$

$$\overline{PR} = \overline{OR} - \overline{OP} = [(a, 3, -1) - (1, 1, 0)] = (a - 1, 2, -1).$$

$$\frac{1}{a-1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow -1 = a - 1 \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

La recta que los contiene s , calculada en a): $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$

6°) Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia afuera. La superficie del campo mide $(4 + \pi)$ metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal como se observa en la figura. Si pide:



a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura "y" den rect

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

a)

$$S = x \cdot y + \pi \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4 + \pi; \quad x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4} = 4 + \pi;$$

$$4xy + \pi y^2 = 16 + 4\pi \Rightarrow x = \frac{16+4\pi-\pi y^2}{4y} = \frac{4+\pi}{y} - \frac{\pi y}{4}.$$

$$\text{Perímetro} = P(y) = 2y + 2x + 2\pi \cdot \frac{y}{2} = 2y + \frac{8+2\pi}{y} - \frac{\pi y}{2} + \pi y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(y) = 2y + \frac{8+2\pi}{y} + \frac{\pi y}{2}.$$

b)

La cantidad de pintura gastada será mínima cuando lo sea el perímetro.

Una función tiene un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(y) = 2 - \frac{8+2\pi}{y^2} + \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow 2 + \frac{\pi}{2} = \frac{8+2\pi}{y^2}; \quad 4y^2 + \pi y^2 = 16 + 4\pi;$$

$$(4 + \pi)y^2 = 16 + 4\pi; \quad y^2 = \frac{16+4\pi}{4+\pi} = 4 \Rightarrow y = \pm 2.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual, la solución es $y = 2$.

$$\text{Justificación de mínimo: } P''(y) = -(8 + 2\pi) \cdot \frac{-2y}{y^4} = \frac{16+4\pi}{y^3}.$$

$$P''(2) = \frac{16+4\pi}{2^3} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } y = 2, \text{ como queríamos justificar.}$$

$$\text{Para } y = 2 \Rightarrow x = \frac{4+\pi}{2} - \frac{2\pi}{4} = \frac{4+\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2.$$

El gasto de pintura es mínimo para $x = y = 2$ metros.
