PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2021

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

1º) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+(a+1)z=2 \\ x+(a-1)y+2z=1 \\ 2x+ay+z=-1 \end{cases}$:

a) Estudiadlo en función de los valores del parámetro real a.

b) Encontrad todas las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & a+1 \\ 1 & a-1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}=(a-1)+a(a+1)+4-2(a^2-1)-2a-1=$$

$$=a-1+a^2+a+4-2a^2+2-2a-1=4-a^2=0 \Rightarrow a_1=-2, a_2=2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq -2 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 + 2 + 12 + 2 + 1 = 16 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = -2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 + 6 - 8 - 1 + 3 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \in R - \{-2, 2\}$, que el sistema resulta compatible determinado. Se utiliza el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 1 & a-1 & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & a-2 & 1-a & -1 \\ 0 & a-2 & -2a-1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & a-2 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & -a-2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a+1 & 2 \\ 0 & a-2 & 1-a & -1 \\ 0 & 0 & a+2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$(a+2)z = 4 \Rightarrow z = \frac{4}{a+2}.$

$(a-2)y + (1-a) \cdot \frac{4}{a+2} = -1;\ \ (a-2)y = -1 - \frac{4(1-a)}{a+2} = \frac{-a-2+4(a-1)}{a+2} = \frac{3a-6}{a+2};$

$(a-2)y = \frac{3(a-2)}{a+2} \Rightarrow y = \frac{3}{a+2}.$

$$x + y + (a+1)z = 2;\ \ x = 2 - \frac{3}{a+2} - \frac{4(a+1)}{a+2} = \frac{2a+4-3-4a-4}{a+2} \Rightarrow x = \frac{-2a-3}{a+2}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{-2a-3}{a+2};\ \ y = \frac{3}{a+2};\ \ z = \frac{4}{a+2}, \forall a \in R - \{-2, 2\}.}$$

$b)$

Se resuelve ahora para $a = 2$; el sistema resulta compatible indeterminado.

$$a = 2 \Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$. Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y haciendo $y = \lambda$, resulta: $z = 1;\ \ x = -1 - \lambda$.

$$\underline{Solución: x = -1 - \lambda;\ \ y = \lambda;\ \ z = 1, \forall \lambda \in R.}$$

****

2º) Sean los siguientes planos $\pi_1: x+y+z=a-1$; $\pi_2: 2x+y+az=a$ y $\pi_3: x+ay+z=1$.

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a.

b) Para $a=1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3.

c) Para $a=2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos-son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & a-1\\ 2 & 1 & a & a\\ 1 & a & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.
(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M = 1$; $Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.
(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)
(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M = 2$; $Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.
(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)
(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{vmatrix} = 1+2a+a-1-a^2-2=-a^2+3a-2=0;$$

$a^2-3a+2=0$; $a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2} \Rightarrow a_1=1, a_2=2.$

$\begin{Bmatrix} a\neq 1\\ a\neq 2\end{Bmatrix} \Rightarrow RangM = Rang\ M' = 3\ los\ planos\ secantes; se\ contan\ en\ un\ punto.$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1-2 = -1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{a = 1 \Rightarrow RangM = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Hay\ planos\ secantes}.$$

$$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_3\ son\ paralelos\ y\ secantes\ con\ \pi_2}.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{a = 2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta}.$$

$b)$

Como se ha visto en el apartado anterior, los planos $\pi_1\ y\ \pi_3$ son paralelos, por lo cual:

$$\underline{No\ existe\ recta\ de\ corte\ de\ \pi_1\ y\ \pi_3}.$$

$c)$

Para $a = 2$ los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ son: $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \pi_2 \equiv 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$, que determinan la recta siguiente:

$$\pi_2 - 2\pi_1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \end{cases}}.$$

****

3º) Consideremos la función $f(x) = \frac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

$a)$ El dominio y las asíntotas de la función f.

$b)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$,

$c)$ La integral $I = \int f(x) \cdot dx$.

$a)$

Por tratarse de una función racional, su dominio es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{D(f) \Rightarrow R - \{-2, 0\}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x(x+2)} = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 0\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

$b)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1\cdot[x\cdot(x+2)]-(x-1)\cdot[1\cdot(x+2)+x\cdot 1]}{x^2(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-(x-1)(2x+2)}{x^2(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-2(x-1)(x+1)}{x^2(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x-2(x^2-1)}{x^2(x+2)^2} = \frac{x^2+2x-2x^2+2}{x^2(x+2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x^2(x+2)^2}.$$

Por ser $x^2(x+2)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, $f'(x)$ será positiva o negativa cuando sea positivo o negativo la expresión $-x^2 + 2x + 2$.

$$-x^2 + 2x + 2 = 0;\;\; x^2 - 2x - 2 = 0;\;\; x = \frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3},\;\; x_2 = 1 + \sqrt{3}.$$

Siendo la función $g(x) = -x^2 + 2x + 2$ una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2, que corta el eje de abscisas en los puntos $P_1\left(1-\sqrt{3}, 0\right)$ y $P_2\left(1+\sqrt{3}, 0\right)$. Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, -2) \cup \left(-2, 1-\sqrt{3}\right) \cup \left(1+\sqrt{3}, +\infty\right).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon \left(1-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, 1+\sqrt{3}\right).}$$

$c)$

$$I = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{x-1}{x(x+2)} \cdot dx.$$

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} A+B=1 \\ 2A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}.$$

$$-\frac{1}{2} + B = 1 \Rightarrow B = \frac{3}{2}.$$

$$I = \int \frac{x-1}{x(x+2)} \cdot dx = \int \left(\frac{-1/2}{x} + \frac{3/2}{x+2}\right) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L|x| + \frac{3}{2} \cdot L|x+2| + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{x-1}{x(x+2)} \cdot dx = L\left|\sqrt{\frac{(x+2)^3}{x}}\right| + C.}$$

****

4º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtened el rango de la matriz en función del parámetro m.

b) Explicad cuándo la matriz A es invertible.

c) Resolver la ecuación $X \cdot A = I$, donde I es la matriz identidad, en el caso de $m = 1$.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & m \\ 0 & m & 0 \\ 2 & 1 & m^2+1 \end{vmatrix} = -m(m^2+1) - 2m^2 = -m^3 - m - 2m^2 =$$

$$= -m(m^2+2m+1) = -m(m+1)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = -1, m_2 = 0.$$

$$\underline{Para \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = 3.}$$

$$Para\ a = -1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A = 2.$$

$$\underline{Para \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = 2.}$$

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$\underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall m \in R - \{-1, 0\}}.$$

c)

$X \cdot A = I;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = I \cdot A^{-1};\ \ X \cdot I = A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1}}.$

Se obtiene la inversa de la matriz A por el método de Gauss-Jordan.

Para $m = 1$ es $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&2&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to -F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&-1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_3\to F_3-2F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&-1&-1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&5&4&2&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1+2F_2\\F_3\to F_3-5F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&2&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&4&2&-5&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3\to\frac{1}{4}F_3\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&2&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{5}{4}&\frac{1}{4}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&\frac{1}{2}\\0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{5}{4}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-2&3&1\\0&4&0\\2&-5&1\end{pmatrix}}.$$

****

5º) Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

$a)$ Calcular la distancia del punto P al plano π.

$b)$ Calcular el punto P' que es simétrico de P respecto del plano π.

$c)$ Calculad la ecuación del plano π' que pasa por P' y es paralelo a π.

$a)$

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(1, 2, 3)$ y al plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$:

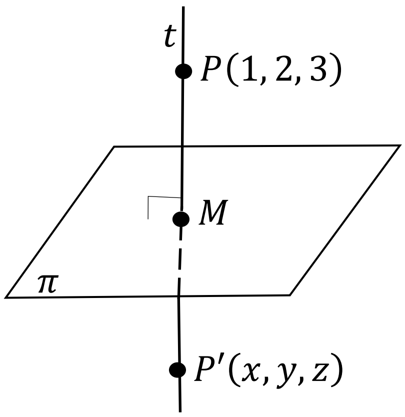
$$d(A, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|3 + 4 + 3 + 4|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{14}{\sqrt{14}}.$$

$$\underline{d(P, \pi) = \sqrt{14}\ unidades.}$$

$b)$

La recta t que pasa por $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n} = (3, 2, 1)$. $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es el siguiente:



$$\left. \begin{array}{r} \pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3(1 + 3\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + (2 + 2\lambda) + 4 = 0;$

$3 + 9\lambda + 4 + 4\lambda + 2 + 2\lambda + 4 = 0;\ \ 15 + 15\lambda = 0;$

$1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow M(-2, 0, 2).$

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MP'}$.

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = [(-2, 0, 2) - (1, 2, 3)] = (-3, -2, -1).$

$\overrightarrow{MP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OM} = [(x, y, z) - (-2, 0, 2)] = (x + 2, y, z - 2).$

$$(-3,-2,-1) = (x+2, y, z-2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2=-3 \to x=-5 \\ y=-2 \\ z-2=-1 \to z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P'(-5,-2,1)}.$$

$c)$

El haz de planos α, paralelos a π tiene la expresión $\alpha \equiv 3x+2y+z+D=0$. De los infinitos planos del haz α, el plano π' que contiene al punto P', es el que satisface su ecuación:

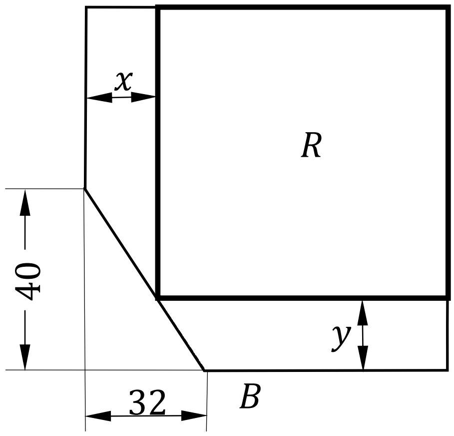
$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 3x+2y+z+D=0 \\ P'(-5,-2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot(-5)+2\cdot(-2)+1+D=0;$$

$-15-4+1+D=0;\ \ D-18=0 \Rightarrow D=18.$

$$\underline{\pi' \equiv 3x+2y+z+18=0}.$$

****

6º) Un espejo plano, cuadrado, de 80 cm de lado, se ha roto por una esquina siguiendo una línea recta. El trozo desprendido tiene forma de triángulo rectángulo de catetos 32 cm y 40 cm, respectivamente. En el espejo roto recortamos una pieza rectangular R, uno de cuyos vértices es el punto $P(x, y)$. Véase la figura adjunta.



a) Hallad el área de la pieza rectangular obtenida en función de x, para $0 \leq x \leq 32$.

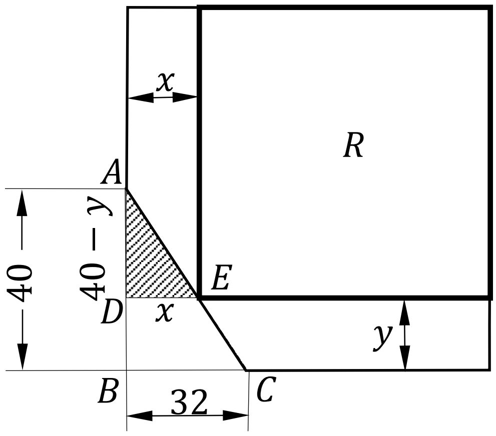
b) Calculad las dimensiones que tendrá R para que su área sea máxima.

c) Calculad el valor de dicha área máxima.

----

a)

Para expresar el valor de y en función de x se tiene en cuenta que los triángulos rectángulos ABC y ADE son semejantes por lados paralelos.



$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} \Rightarrow \frac{40}{32} = \frac{40-y}{x}$; $\frac{5}{4} = \frac{40-y}{x}$;

$5x = 160 - 4y \Rightarrow y = \frac{160-5x}{4}$.

$$R = (80 - x)(80 - y) \Rightarrow R(x) = (80 - x)\left(80 - \frac{160-5x}{4}\right) =$$

$$= (80 - x)\left(\frac{320-160+5x}{4}\right) \Rightarrow \underline{R(x) = \frac{1}{4} \cdot (80 - x)(160 + 5x)}.$$

b)

Para que el área sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = \frac{1}{4}[-1 \cdot (160 + 5x) + (80 - x) \cdot 5] = \frac{1}{4}(-160 - 5x + 400 - 5x) =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (240 - 10x) \Rightarrow S'(x) = \frac{5}{2} \cdot (24 - x).$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot (24 - x) = 0;\ \ 24 - x = 0 \Rightarrow x = 24;$$

$$S'(x) = \frac{5}{2} \cdot (-1) = -\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 24.$$

$$y = \frac{160-5x}{4} \Rightarrow x = 24 \Rightarrow y = \frac{160-5\cdot24}{4} = y = \frac{160-120}{4} = y = \frac{40}{4} = 10.$$

$80 - 24 = 56;\ \ 80 - 10 = 70.$

$\underline{El\ \text{área}\ R\ es\ máxima\ cuando\ sus\ dimensiones\ son\ 56 \times 70\ cm}.$

$c)$

$R = x \cdot y = 56 \cdot 70 = 3.920.$

$\underline{El\ \text{área}\ máxima\ de\ R\ es\ de\ 3.920\ cm^2}.$

****