PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2022

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Se pide:

$a)$ Demostrar que $C-A\cdot B^t$ tiene inversa y calcularla.

$b)$ Calcular la matriz X que verifica $C\cdot X=A\cdot B^t\cdot X+I$, donde I es la matriz identidad.

$c)$ Justificar que $(A\cdot B^t)^n=2^nI$ para todo número natural n.

$a)$

$$C-A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow C-A\cdot B^t=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}.$$

$$|C-A\cdot B^t|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix}=3\neq 0\Rightarrow \underline{C-A\cdot B^t\ es\ invertible, c.q.d.}$$

Se obtiene la inversa de $C-A\cdot B^t$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(C-A\cdot B^t|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to -F_1\\ F_2\to -F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_2\to\tfrac{1}{3}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{(C - A \cdot B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$C \cdot X = A \cdot B^t \cdot X + I; \;\; C \cdot X - A \cdot B^t \cdot X = I; \;\; (C - A \cdot B^t) \cdot X = I;$$

$$(C - A \cdot B^t)^{-1} \cdot (C - A \cdot B^t) \cdot X = (C - A \cdot B^t)^{-1} \cdot I; \;\; I \cdot X = (C - A \cdot B^t)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = (C - A \cdot B^t)^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

$$A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

$$(A \cdot B^t)^n = (2I)^n = 2^n \cdot I^n = 2^n \cdot I.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ (A \cdot B^t)^n = 2^n \cdot I, \forall n \in N}.$$

****

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{pmatrix}$, determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro m.

b) La inversa de A en el caso de $m=2$.

c) El número natural m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{vmatrix}=m^3-4m^2(m-1)-2m^2=0;$$

$m^3-4m^3+4m^2-2m^2=0;\ \ -3m^3+2m^2=0;\ -m^2(3m-2)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m_1=0, m_2=\frac{2}{3}.$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} m\neq 0 \\ m\neq 2/3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=3.}$$

$$Para\ m=0 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\neq 0.$$

$$Para\ m=\frac{2}{3} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{9} \end{vmatrix}\neq 0.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} m=0 \\ m=2/3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ A=2.}$$

b)

$$Para\ m=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}. \qquad A^t=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=8-16-8=-16.$$

$$Adj.\,de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -6 \\ -16 & -8 & 8 \end{pmatrix}}{-16} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \\ 8 & 4 & -4 \end{pmatrix}}.$$

$c)$

Teniendo en cuenta que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar por el número todos los elementos de la matriz y que si se multiplican los elementos de una línea de una matriz por un número real su determinante queda multiplicado por el número real, y que la matriz A tiene dimensión tres:

$$|2A| = -8 \Rightarrow 2^3 \cdot |A| = -8;\ \ |A| = -1;\ \ -3m^3 + 2m^2 = -1;$$

$3m^3 - 2m^2 - 1 = 0.$ Resolviendo por Ruffini se deduce que la única solución real que tiene la ecuación es $m = 1$.

$$\underline{|2A| = -8 \Rightarrow m = 1}.$$

****

3º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s.

b) Hallar la ecuación de la recta ℓ que pasa por el origen y corta a r y s.

----

a)

Las expresiones de las rectas por ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases} \Rightarrow z = \delta \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 4 - 5\delta \\ y = -3 + 4\delta \\ z = \delta \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-1, 2, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, -3, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(4, -3, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-5, 4, 1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(4, -3, 0) - (-1, 2, 0)] = (5, -5, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 25 - 15 - 20 + 5 = -5 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

b)

$\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0)$. $\overrightarrow{OB} = (4, -3, 0)$.

La recta ℓ pedida es la intersección de los planos π_1 y π_2 definidos de la forma siguiente:

El plano π_1 contiene a la recta r y al origen de coordenadas y el plano π_2 contiene a la recta s y al origen de coordenadas; sus expresiones generales son las siguientes:

$$\pi_1(O;\ \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{v_r}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2x + 3z - 2z + y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi_1 \equiv 2x + y + z = 0.$

$$\pi_2(O;\ \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{v_s}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & -3 & 0 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -3x + 16z - 15z - 4y = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi_2 \equiv 3x + 4y - z = 0.$

$$\underline{\ell \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 4y - z = 0 \end{cases}}.$$

****

4º) Dados los planos $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} y = 1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ y la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$:

a) Calcular la posición relativa de $\pi_1\ y\ \pi_2$.

b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P(1, 0, 0)$ respecto del plano π_1.

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de $\pi_1\ y\ r$.

----

a)

$A(1, 1, 0), \vec{u} = (1, 1, 1)\ y\ \vec{v} = (0, 1, -1)$ son un punto y dos vectores directores del plano π_2, cuya expresión general es la siguiente:

$$\pi_2(A;\ \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

$-(x-1) + z - (x-1) + (y-1) = 0;\ \ -2(x-1) + (y-1) + z = 0;$

$-2x + 2 + y - 1 + z = 0 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x - y - z - 1 = 0.$

La posición relativa de los planos $\begin{cases} \pi_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ es la siguiente:

$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \Rightarrow Secantes.$ (Tienen en común una recta).

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2} \Rightarrow Paralelos.$ (No tienen ningún punto en común).

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \Rightarrow Coincidentes.$ (Tienen todos sus puntos en común).

Siendo $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2 \equiv 2x - y - z - 1 = 0$:

$\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow \underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ son\ paralelos}.$

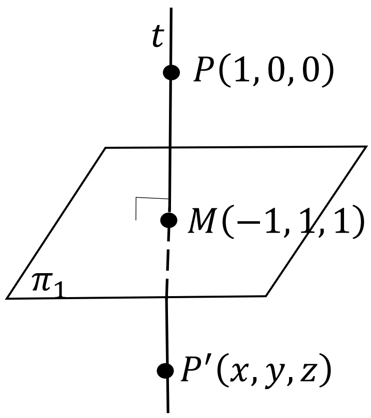
b)

Un vector normal del plano $\pi_1 \equiv 2x - y - z + 4 = 0$ es $\vec{n} = (2, -1, -1)$.

La recta t, perpendicular a π_1 y que contiene al punto $P(1, 0, 0)$ tiene la siguiente expresión por unas ecuaciones paramétricas:

$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$. El punto M, intersección de la recta t con el plano π_1 es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x - y - z = -4 \\ t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



$\Rightarrow 2(1 + 2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) = -4;$

$2 + 4\lambda + \lambda + \lambda = -4;\;\; 6\lambda = -6 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow M(-1, 1, 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = -1 \Rightarrow x = -3 \\ \frac{y+0}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 \\ \frac{z+0}{2} = 1 \Rightarrow z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P'(-3, 2, 2\,)}.$$

$c)$

La expresión de $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \delta \\ y = 2\delta \\ z = 2 - \delta \end{cases}$.

El punto Q, intersección de la recta r con el plano π_1 es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi_1 \equiv 2x - y - z = -4 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + \delta \\ y = 2\delta \\ z = 2 - \delta \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + \delta) - 2\delta - (2 - \delta) = -4;$$

$$2 + 2\delta - 2\delta - 2 + \delta = -4 \Rightarrow \delta = -4 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 - 4 = -3 \\ y = -8 \\ z = 2 + 4 = 6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{Q(-3, -8, 6)}.$$

****

5º) Consideramos la función $f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes.

b) Las asíntotas de la función.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos.

d) La primitiva de la función $f(x)$.

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x_1=-2, x_2=2 \Rightarrow \underline{D(f) \ \Rightarrow R-\{-2,2\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+3}{x^2-4}=0 \Rightarrow x^2+3=0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{No\ corta\ al\ eje\ X}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=-\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{A\left(0,-\frac{3}{4}\right)}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y=1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x=-2, x=2}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-4-x^2-3)}{(x^2-4)^2}=\frac{-14x}{(x^2-4)^2}.$$

Por ser $(x^2-4)^2>0, \forall x \in D(f)$, el signo de la derivada es el del numerador de su derivada.

$$Para\ x < 0 \Rightarrow\ f'(x) > 0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (-\infty, -2) \cup (-2, 0)}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow\ f'(x) < 0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: (0, 2) \cup (2, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = \frac{-14x}{(x^2-4)^2}. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-14x}{(x^2-4)^2} = 0;\ -14x = 0;\ \ x = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-14\cdot(x^2-4)^2 + 14x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{-14\cdot(x^2-1)+56x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{-14x^2+14+56x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{42x^2+14}{(x^2-4)^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{14\cdot(3x^2+1)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{14\cdot(3\cdot 0^2+1)}{(0^2-4)^3} = \frac{14}{-64} < 0\ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{0+3}{0-4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \underline{Máximo: A\left(0, -\frac{3}{4}\right)}.$$

$d)$

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int \frac{x^2+3}{x^2-4}\cdot dx = \int \frac{x^2-4+7}{x^2-4}\cdot dx = \int \left(1 - \frac{7}{x^2-4}\right)\cdot dx =$$

$$= \int dx - 7\cdot\int \frac{1}{x^2-4}\cdot dx = x - 7\cdot I. \quad (*)$$

$$I = \int \frac{1}{x^2-4}\cdot dx \Rightarrow \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx+2N}{(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{(M+N)x+(-2M+2N)}{x^2-4} \Rightarrow \left.\begin{aligned} M+N &= 0 \\ -2M+2N &= 1 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2M+2N &= 0 \\ -2M+2N &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow N = \frac{1}{4};\ M = -\frac{1}{4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-2}\right)\cdot dx = \int \left(-\frac{1/4}{x+2} + \frac{1/4}{x-2}\right)\cdot dx = \frac{1}{4}[L|x-2| - L|x-2|] + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4}\cdot L\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

$$\underline{F(x) = x - \frac{1}{4}\cdot L\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.}$$

****

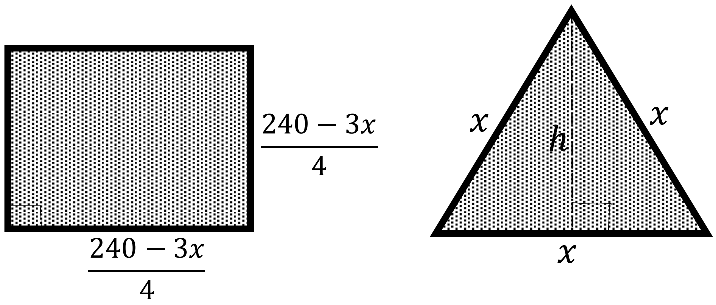
6º) Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 metros de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor de x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo.

b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima.

----

a)



$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

$$S_T(x) = S_t(x) + S_c(x) = \frac{1}{2}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x + \left(\frac{240-3x}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{57.600 - 1.440x + 9x^2}{16} =$$

$$= \frac{4\sqrt{3}x^2 + 57.600 - 1.440x + 9x^2}{16} \Rightarrow \underline{S_T(x) = \frac{1}{16} \cdot \left[\left(4\sqrt{3}+9\right)x^2 - 1.440x + 57.600\right]}.$$

b)

Para que una función tenga un mínimo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'_T(x) = \frac{1}{16} \cdot \left[2\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 1.440\right].$$

$$S'_T(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{16} \cdot \left[2\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 1.440\right] = 0;\ \ 2\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 1.440 = 0;$$

$$\left(4\sqrt{3}+9\right)x - 720 = 0 \Rightarrow x = \frac{720}{4\sqrt{3}+9} = \frac{720 \cdot \left(4\sqrt{3}-9\right)}{\left(4\sqrt{3}+9\right)\left(4\sqrt{3}-9\right)} = \frac{720 \cdot \left(4\sqrt{3}-9\right)}{48-81} =$$

$$= \frac{720 \cdot \left(9-4\sqrt{3}\right)}{33} \Rightarrow x = \frac{240 \cdot \left(9-4\sqrt{3}\right)}{11} \Rightarrow 3x = \frac{720 \cdot \left(9-4\sqrt{3}\right)}{11} \cong 135{,}61.$$

$$\underline{Superficie\ mínima\ si\ la\ longitud\ del\ cable\ del\ triángulo\ es\ 135{,}61\ metros.}$$

Para $x = \frac{240 \cdot \left(9-4\sqrt{3}\right)}{11}$ la suma, aproximada, de las superficies es la siguiente:

$$S_T = \frac{1}{16} \cdot \left\{ \left(4\sqrt{3} + 9\right) \cdot \left[\frac{240 \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{11}\right]^2 - 1.440 \cdot \frac{240 \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right)}{11} + 57.600 \right\} =$$

$$= \frac{240^2}{16} \cdot \left[\frac{(81 - 48) \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right) - 66 \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right) + 121}{122}\right] = \frac{3.600}{122} \cdot \left[121 - 33 \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{3.600}{11} \cdot \left[11 - 3 \cdot \left(9 - 4\sqrt{3}\right)\right] = \frac{3.600}{11} \cdot \left(11 - 27 + 12\sqrt{3}\right) = \frac{3.600 \cdot \left(12\sqrt{3} - 16\right)}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{S_T = \frac{14.400 \cdot \left(3\sqrt{3} - 4\right)}{11}\ m^2 \cong 1.565{,}87\ m^2}.$$

****