PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT	PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATÒRIA: JUNY 2022	CONVOCATORIA: JUNIO 2022
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREM DE L'EXAMEN:
Heu de respondre només a TRES problemes entre els sis que es proposen.
Cada problema puntua fins a 10 punts.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 3, i aproximada a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables, i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

<u>En les respostes heu d'escriure tots els passos del raonament utilitzat.</u>

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Es demana:

a) Demostrar que $C - AB^T$ té inversa i calculeu-la. (4 punts)
b) Calcular la matriu X que verifica $CX = AB^TX + I$, on I és la matriu identitat. (3 punts)
c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^nI$ per a tot número natural n. (3 punts)

Problema 2. Donada la matriu

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determineu:
a) El rang de la matriu A en funció del paràmetre real m. (4 punts)
b) La matriu inversa de A en el cas $m = 2$. (4 punts)
c) El nombre real m per al qual el determinant de la matriu $2A$ és igual a -8. (2 punts)

Problema 3. Donades les rectes $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.
a) Indiqueu justificadament la posició relativa de r i s. (5 punts)
b) Trobeu l'equació de la recta l que passa per l'origen i talla r i s. (5 punts)

Problema 4. Donats els plans $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ i $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, i la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.
a) Calculeu la posició relativa de π_1 i π_2. (3 punts)
b) Calculeu el punt P' que és simètric al punt $P = (1,0,0)$ respecte del pla π_1. (4 punts)
c) Calculeu, si n'hi ha, el punt d'intersecció de π_1 i r. (3 punts)

Problema 5. Considerem la funció $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obteniu:

a) El domini i els punts de tall amb els eixos. (1 punt)

b) Les asímptotes de la funció. (2 punts)

c) Els intervals de creixement i decreixement, i els extrems. (3 punts)

d) La primitiva de la funció $f(x)$. (4 punts)

Problema 6. Es desitja construir un quadrat i un triangle equilàter tallant en dues parts un cable d'acer de 240 m de longitud.

a) Calculeu la suma de les àrees del triangle i del quadrat en funció del valor x que correspon amb els metres que mesura un costat del triangle. (3 punts)

b) Calculeu la longitud de cable necessària per a construir el triangle de manera que la suma de les àrees del triangle i del quadrat siga mínima i calculeu l'àrea mínima. (7 punts)

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se pide:

a) Demostrar que $C - AB^T$ tiene inversa y calcularla. (4 puntos)
b) Calcular la matriz X que verifica $CX = AB^T X + I$, donde I es la matriz identidad. (3 puntos)
c) Justificar que $(AB^T)^n = 2^n I$ para todo número natural n. (3 puntos)

Problema 2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 & m-1 \\ -2m & m^2 & 1 \\ 0 & 2m & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar:

a) El rango de la matriz A en función del parámetro real m. (4 puntos)
b) La matriz inversa de A en el caso $m = 2$. (4 puntos)
c) El número real m para el cual el determinante de la matriz $2A$ es igual a -8. (2 puntos)

Problema 3. Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 - 5z \\ y = 4z - 3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de r y s. (5 puntos)
b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. (5 puntos)

Problema 4. Dados los planos $\pi_1: 2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = 1 + \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, y la recta $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. (3 puntos)
b) Calcular el punto P' que es simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1. (4 puntos)
c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. (3 puntos)

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. (1 punto)
b) Las asíntotas de la función. (2 puntos)
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. (3 puntos)
d) La primitiva de la función $f(x)$. (4 puntos)

Problema 6. Se desea construir un cuadrado y un triángulo equilátero cortando en dos partes un cable de acero de 240 m. de longitud.

a) Calcular la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado en función del valor x que corresponde con los metros que mide un lado del triángulo. (3 puntos)
b) Calcular la longitud de cable necesaria para construir el triángulo de modo que la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado sea mínima y calcular el área mínima. (7 puntos)