PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Enuncie el Teorema de Rolle.

b) Pruebe que cualquiera que sea la constante α la función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ cumple las hipótesis de dicho teorema en el intervalo [1, 3]. Calcule un punto del intervalo $(1,\ 3)$ cuya existencia asegura el Teorema de Rolle.

----

a)

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

b)

La función $f(x)=x^3-5x^2+7x+a$ es continua y derivable en todo su dominio, que es R, por lo tanto le es aplicable el Teorema de Rolle en cualquier intervalo real y, por lo tanto, en el intervalo $(1,\ 3)$.

Aplicando el Teorema:

$$f(x)=x^3-5x^2+7x+a \;\Rightarrow\; \left.\begin{cases} f(1)=1-5+7+a=\underline{a+3} \\ \\ f(3)=27-45+21+a=\underline{a+3} \end{cases}\right\} \;\Rightarrow\; f(1)=f(3)$$

$$\underline{\underline{\textit{La función } f(x)=x^3-5x^2+7x+a \textit{ satisface el Teorema de Rolle en } [-1,\ 1]}}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} = \frac{5 \pm 2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 1} \\ \underline{x_2 = \frac{7}{3}} \end{cases}.$$

No es válido el valor x = 1 por no pertenecer al intervalo $(1,\ 3)$.

$$\underline{\underline{\textit{El valor que satisface el Teorema de Rolle es para } x = \frac{7}{3}}}$$

****

2º) a) Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la curva $y=-2(x-1)^3$, su recta tangente en el punto A(1, 0) y la recta x = 0. (Puede ser útil calcular los cortes de la curva $y=-2(x-1)^3$ con los ejes de coordenadas).

b) Calcule el área de dicha figura plana.

----

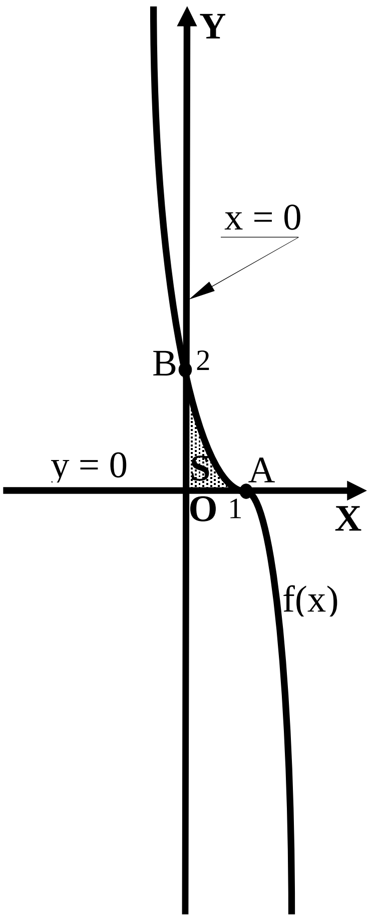
a)

Los puntos de corte con los ejes de la curva $y=-2(x-1)^3$ son A(1, 0) y B(0, 2).

La pendiente de la tangente pedida es el valor de la derivada de la función para el valor de x en el punto A(1, 0), o sea: x = 1.

$$y'=-6(x-1)^2\cdot 1=-6(x-1)^2 \Rightarrow m=y'(1)=-6(1-1)^2=\underline{0=m}.$$

La tangente es la recta horizontal que pasa por A(1, 0): $\underline{t \equiv y=0}$.



Para facilitar la representación gráfica aproximada de la función, vamos a determinar sus extremos relativos, teniendo en cuenta que para x = 1 se anulan algunas de las derivadas sucesivas de x.

$$y''=-12(x-1)\cdot 1=-12(x-1) \Rightarrow \underline{y''(1)=0}.$$

$$y'''=-12 \Rightarrow \underline{y'''(1)\neq 0}.$$

En estos casos puede utilizarse el siguiente teorema:

"Si f(x) es una función con derivada de orden n continua en un valor x_0 y tal que cumple que $f'(x_0)=f''(x_0)= \cdots f^{n-1}(x_0)=0 \ y \ f^n(x_0)\neq 0$, entonces:

1.- Si n es impar, la función f(x) es monótona en x_0, siendo estrictamente creciente cuando $f^n(x_0)>0$ y estrictamente decreciente cuando $f^n(x_0)<0$.

2- Si n es par, la función f(x) tiene un máximo relativo en x_0 cuando $f^n(x_0)<0$ y un mínimo relativo cuando $f^n(x_0)>0$".

Por ser la tercera derivada (impar) la que se hace distinta de cero (menor que cero) para el valor crítico, la función $y=-2(x-1)^3$, la función es monótona decreciente en su dominio, que es R.

Con los datos anteriores puede hacerse una representación gráfica, aproximada, de la situación, que es la que se indica en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_0^1 -2(x-1)^3 \cdot dx=-2\cdot\int_0^1 (x-1)^3 \cdot dx=2\cdot\int_1^0 (x-1)^3 \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=t \\ dx=dt \end{matrix} \middle\| \begin{matrix} x=0\to t=-1 \\ x=1\to t=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S=2\cdot\int_0^{-1} t^3 \cdot dt=2\cdot\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{-1}=2\cdot\left[\frac{(-1)^4}{4}-0\right]=2\cdot\frac{1}{4}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\,u^2=S}}\,.$$

****

3º) Calcule las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación $X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde X^t es la matriz traspuesta de X.

$$X^t = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad X \cdot X^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2+1 & xy+0 \\ xy+0 & y^2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;$$

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2+1=1 \rightarrow \underline{x=0} \\ xy=0 \\ y^2=1 \rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{y_1=1} \\ \underline{y_2=-1} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}} \;;;\; \underline{\underline{X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

****

4º) a) Estudie, en función de los parámetros α y b, la posición relativa de la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y+az=b$.

b) Para cada una de las posiciones obtenidas, diga cómo es el sistema formado por las ecuaciones x = 0, y = 0, x + y + αz = b.

----

a)

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y+az=b \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 $\rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M' = 2 $\rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$Rango\ M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \underline{a=0}$$

$$\underline{\underline{Para\ a \neq 0 \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantges}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow Rango\ M = 2 = Rango\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi}}$$

b)

Para α ≠ 0 la recta r y el plano π tienen un punto en común:

$$\underline{\underline{\mathit{Sistima\ \ Compatible\ \ Determinado}}}$$

Para α = 0 y b ≠ 0 la recta r y el plano π no tienen ningún punto en común:

$$\underline{\underline{\mathit{Sistima\ \ Inompatible}}}$$

Para α = 0 y b = 0 la recta r y el plano π tienen infinitos puntos en común:

$$\underline{\underline{\mathit{Sistima\ \ Compatible\ \ Indeterminado}}}$$

****

OPCIÓN B

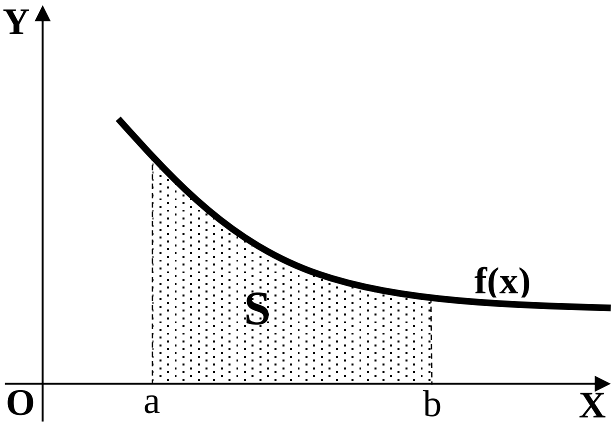
1º) a) Enuncie el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

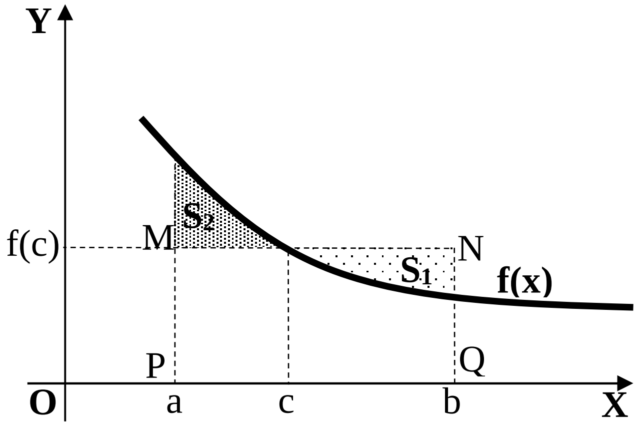
b) Calcule el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x)=e^x+1$ en el intervalo $[0,\ 1]$.

----

a)

El Teorema del Valor Medio del cálculo integral se puede enunciar así: “Si una función f(x) es continua en un intervalo [a, b], existe un valor $c \in [a,\ b]$ tal que $\int_a^b f(x)\cdot dx = f(c)\cdot(b-a)$”.





La interpretación geométrica puede observarse en las figuras anteriores. El área S de la primera figura es equivalente al área del rectángulo de vértices PMNQ, cuya base es (b – a) y su altura es f(c).

El valor de a < c < b es tal que hace que las superficies S_1 y S_2 son iguales, lo cual justifica que S = (b – a) · f(c).

b)

$$\left.\begin{array}{l} S=\int_0^1 (e^x+1)\cdot dx=\left[e^x+x\right]_0^1=(e^1+1)-(e^0-0)=e+1-1=\underline{e\ u^2=S} \\ \\ S=(1-0)\cdot c=\underline{c\ u^2=S} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{c=e}}.$$

****

2º) a) Estudie las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

b) Represente, utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

----

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k, siendo:

$$y = k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} = \frac{1}{e^x} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$y = k = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+3}{e^x} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = -\infty \cdot \infty = -\infty \;\Rightarrow\; \underline{\underline{No}}$$

Asíntotas verticales: son los valores reales de x que anulan el denominador:

$$e^x = 0 \;\Rightarrow\; x \notin R \;\Rightarrow\; \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma y = mx + n, siendo m real y distinto de 0 y n real.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x \cdot e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\infty} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{No\ \ tiene}}$$

Los máximos y mínimos relativos son los siguientes:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}} = \underline{\frac{1-x}{e^x} = f'(x)}$$

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot e^x - (1-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{-1-(1-x)}{e^x} = \frac{-1-1+x}{e^x} = \underline{\frac{x-2}{e^x} = f''(x)}$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot e^x - (x-2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{1-(x-2)}{e^x} = \frac{1-x+2}{e^x} = \underline{\frac{3-x}{e^x} = f'''(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x}{e^x} = 0 \Rightarrow 1-x = 0 \;\;;;\;\; \underline{x=1} \;\;;;\;\; f''(1) = \frac{1-2}{e^1} = -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow \underline{Máximo}$$

$$f(1) = \frac{1}{e} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máximo \;\Rightarrow\; A\left(1,\ \frac{1}{e}\right)}}$$

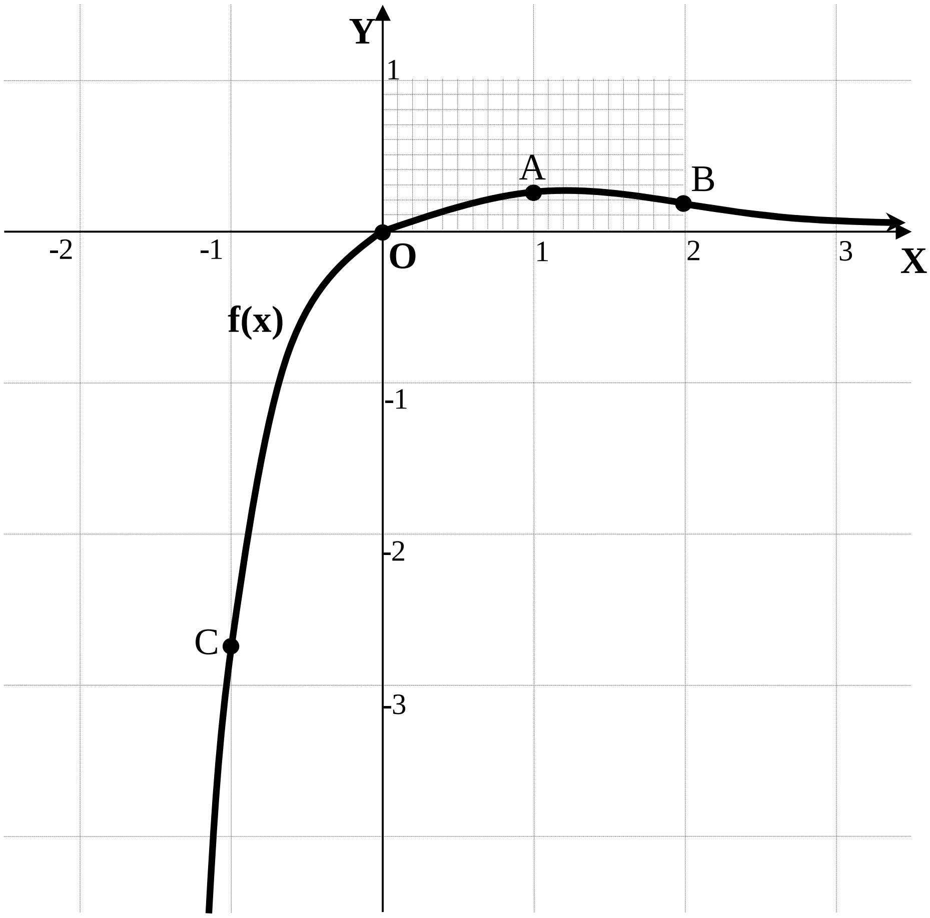
$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{e^x} = 0 \Rightarrow x-2 = 0 \;\;;;\;\; \underline{x=2} \;\;;;\;\; f'''(2) = \frac{3-2}{e^2} = \frac{1}{e^2} \neq 0 \Rightarrow \underline{P.\ I.}$$

$$f(2)=\frac{2}{e^2} \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \Rightarrow B\left(2,\ \frac{2}{e^2}\right)}}.$$

b)

Con los datos anteriores puede esbozarse la gráfica de la función, que es la que se expresa a continuación, teniendo en cuenta además que:

$$f(0)=\frac{0}{e^0}=0 \Rightarrow \underline{O(0,\ 0)}\ ;;\ f(-1)=\frac{-1}{e^{0-1}}=-e \Rightarrow \underline{C(-1,\ -e)}.$$



****

3º) Discuta, en función del parámetro α, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} -x+2y+z=a \\ x+(a-1)y+az=0 \\ ax+2y+z=-1 \end{array}\right\}$.

(No es necesario resolverlo en ningún caso).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & a-1 & a \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a & 0 \\ a & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & a-1 & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix}=-(a-1)+2+2a^2-a(a-1)+2a-2=-a+1+2a^2-a^2+a+2a=$$

$$=a^2+2a+1=(a+1)^2=0 \Rightarrow \underline{a=-1}.$$

$$\underline{Para \;\; a \neq -1 \Rightarrow Rango \; M = Rango \; M'=3=n^{o} \; incógnitas \Rightarrow Compatible \; Determinado}$$

$$Para \;\; \alpha=-1 \; es \Rightarrow M=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=-2C_2=-C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Rango \;\; M=1} \; ;; \; \underline{Rango \;\; M'=2}.$$

$$\underline{Para \;\; a=-1 \Rightarrow Rango \; M=1 \; ;; \; Rango \; M'=2 \Rightarrow Incompatible}$$

****

4º) Considere las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

a) Determine el plano π que contiene a la recta r y corta perpendicularmente a s.

b) Calcule el punto donde se cortan el plano π y la recta s.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v}=(0,\ 1,\ 1)$.

El plano π, por ser perpendicular a la recta s, tiene como vector normal al vector director de s, por lo que su ecuación general es de la forma $\pi \equiv y+z+D=0$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=1+\lambda} \;;;\; \underline{y=-1-\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

El plano π, por contener a la recta r, contiene a todos sus puntos. Uno de los puntos de r se deduce de la expresión paramétricas de r, que es A(1, -1, 0).

Para obtener el valor de D en la expresión general de π tenemos en cuenta que contiene al punto A(1, -1, 0), por lo cual, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y+z+D=0 \\ A(1,\ -1,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow -1+0+D=0 \;;;\; D=1 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv y+z+1=0}}.$$

b)

El punto P de corte del plano π y la recta s es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y+z+1=0 \\ s \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+\lambda+1=0 \;;;\; 2\lambda=-1 \;;;\; \underline{\lambda=-\frac{1}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(1,\ -\tfrac{1}{2},\ -\tfrac{1}{2}\right)}}.$$

****