PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2012 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Discuta, en función del parámetro α, el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x-y+2z=a \\ -x+y-az=1 \\ x+ay+(1+a)z=-1 \end{array}\right\}$.

(No hay que resolverlo en ningún caso)

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & a & 1+a \end{pmatrix} \; y \; A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & a & 1+a & -1 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función del parámetro α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix}=(1+a)-2a+a-2+a^2-(1+a)=1+a-a-2+a^2-1-a=$$

$$=a^2-a-2=0 \;;;\; a=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-1} \;;;\; \underline{a_2=2}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ determinado$$

$$Para\ \ \alpha=-1 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_2=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-1 \Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=2<n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ in\det er\min ado}}$$

$$Para\ \ \alpha=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4-1-2-2+1=-9\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2 \Rightarrow Rango\ A=2\ ;;\ Rango\ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

2º) Calcule todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{v}=(-1,\ 2,\ 1)$.

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a ambos, el vector $\overrightarrow{z}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{z}=\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-i+2k+j-k+2i-j=i+k=\underline{\underline{(1,\ 0,\ 1)=\overrightarrow{z}}}\ .$$

Se llama versor de un vector $\overrightarrow{a}$ al vector unitario que tiene la misma dirección que $\overrightarrow{a}$; pueden ser dos, que son opuestos y se obtienen teniendo en cuenta que un vector dividido por su módulo resulta un versor del vector; los versores de $\overrightarrow{a}$ son los siguientes: $\overrightarrow{a_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\overrightarrow{a_1}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Los vectores pedidos son linealmente dependientes de los versores y módulo 2:

$\overrightarrow{z_1}=\left(\frac{2}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$ y $\overrightarrow{z_1}=\left(-\frac{2}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, que son equivalente a los siguientes:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{z_1}=\left(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}\right)}}\ y\ \underline{\underline{\overrightarrow{z_1}=\left(-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{2}\right)}}$$

****

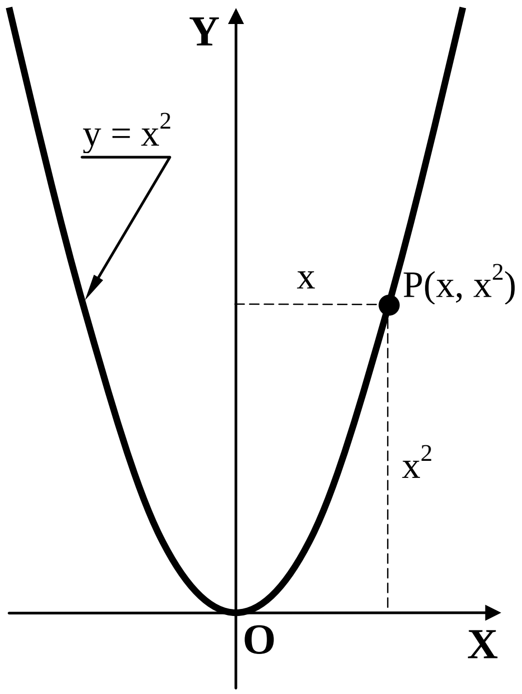
3º) a) Determine el punto P(x, y) de la parábola $y = x^2$ en el que la suma $x + y$ alcanza su mínimo valor.

b) Explique porqué dicho mínimo es absoluto.

----

a)

Los puntos de la parábola $y = x^2$ son de la forma $P(x,\ x^2)$ por lo cual la suma $x + y$ es $S = x + y = x + x^2$.



Para que la suma S sea mínima es necesario que se anule su primera derivada y que la segunda derivada sea positiva para ese valor.

$$S' = 1 + 2x = 0 \Rightarrow \underline{x = -\frac{1}{2}}.$$

$$S'' = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo para } x = -\frac{1}{2}}.$$

El punto P pedido es el siguiente:

$$y\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)}}.$$

b)

La primera derivada tiene solución única, lo que implica que el punto crítico (máximo o mínimo) es único; como quiera que la segunda derivada es positiva sin depender de x, el punto hallado es único y por lo tanto mínimo absoluto.

****

4º) a) Calcule los puntos de corte de la recta $r \equiv 2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2,\ x > 0$.

b) Dibuje el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

c) Calcule el área de dicho recinto.

----

a)

Los puntos de corte de la curva con cada una de las rectas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv 2y - x = 3 \\ xy = 2 \to x > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \to y = \frac{x+3}{2} \\ \to y = \frac{2}{x} \end{array} \Rightarrow \frac{x+3}{2} = \frac{2}{x}\ ;;\ x^2 + 3x - 4 = 0\ ;;\ x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

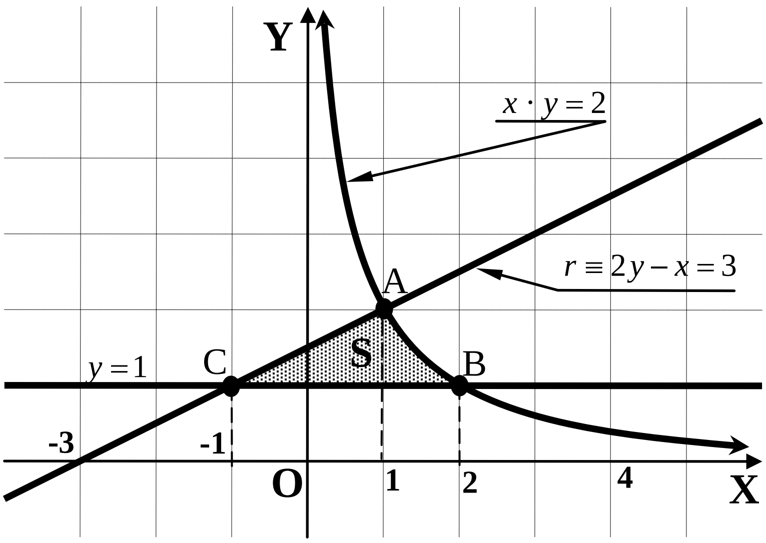
$$= \frac{-3 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4 < 0\ \ (no\ \ interesa\ \ para\ \ el\ \ ejercicio) \\ x_2 = 1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 2)} \end{cases}.$$

$$\left.\begin{array}{r} y = 1 \\ xy = 2 \to x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x \cdot 1 = 2\ ;;\ x = 2 \Rightarrow \underline{B(2,\ 1)}.$$

El punto de corte de las rectas es: $\left.\begin{array}{r} r \equiv 2y - x = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - x = 3\ ;;\ x = -1 \Rightarrow \underline{C(-1,\ 1)}.$

b)

La representación gráfica de la situación es la que indica la figura.



c)

De la observación de la figura se deduce el valor del área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\frac{x+3}{2}-1\right)\cdot dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-1\right)\cdot dx=\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{2}\cdot dx+\left[2L\left|x\right|-x\right]_{1}^{2}=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\cdot dx+$$

$$+\left[(2L2-2)-(2L1-1)\right]=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left[\frac{(-1)^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot(-1)\right]+2L2-2-0+1=$$

$$=\frac{1+2}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2L2-1=\frac{3-1+2+8L2-4}{4}=\frac{8L2}{4}=\underline{\underline{2L2\ u^2\cong 1'39\ u^2=S}}\ .$$

****

OPCIÓN B

1º) Calcule la matriz inversa de $A = B^2 - 2C$, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = B^2 - 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A}.$$

Para hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ procedemos por el método de Gauss-Jordan.

$$(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to \tfrac{1}{2}F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to \tfrac{1}{2}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 + 2F_3 \\ F_2 \to F_2 - 2F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

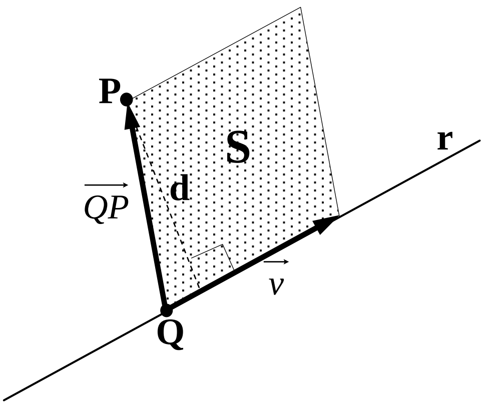
$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

****

2º) Calcule la distancia del punto P(3, -1, 2) a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

La distancia d del punto P a la recta r puede determinarse teniendo en cuenta que Q es un punto de r y $\overrightarrow{v_r}$ es el vector director de la recta r.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un gráfico aproximado de la situación.



Teniendo en cuenta que $S = d \cdot \left|\overrightarrow{v_r}\right|$ y que también puede ser $S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d = \dfrac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$.

Un punto de r es Q(0, -1, 0).

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\pi_1 \equiv x - y + z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + z = 0$; los vectores normales son, respectivamente, $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 0,\ 1)$.

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + j + k - j = -i + k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 0,\ -1)}.$$

El vector $\overrightarrow{QP}$ es: $\overrightarrow{QP} = P - Q = (3,\ -1,\ 2) - (0,\ -1,\ 0) = (3,\ 0,\ 2)$.

Aplicando la fórmula de la distancia:

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3j - 2j|}{\sqrt{1+0+1}} = \frac{|-5j|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{2}}{2}\ u = d(P,\ r)}}$$

****

3º) Considere la función $f(x)=|x|+|x-2|$.

a) Exprese f(x) como una función definida a trozos.

b) Dibuje la gráfica de f(x).

c) Escriba el intervalo abierto de la recta real formada por los puntos en los que f(x) es derivable y se anula su derivada.

----

a)

Sean las funciones $g(x)=|x|$ y $h(x)=|x-2|$; pueden expresarse como funciones definidas a trozos de la forma siguiente:

$$g(x)=|x|=\begin{cases} -x & si\ x<0 \\ x & si\ x\geq 0 \end{cases} \quad y \quad h(x)=|x-2|=\begin{cases} -x+2 & si\ x<2 \\ x-2 & si\ x\geq 2 \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la función $f(x)=|x|+|x-2|$ puede redefinirse a trozos de la siguiente forma:

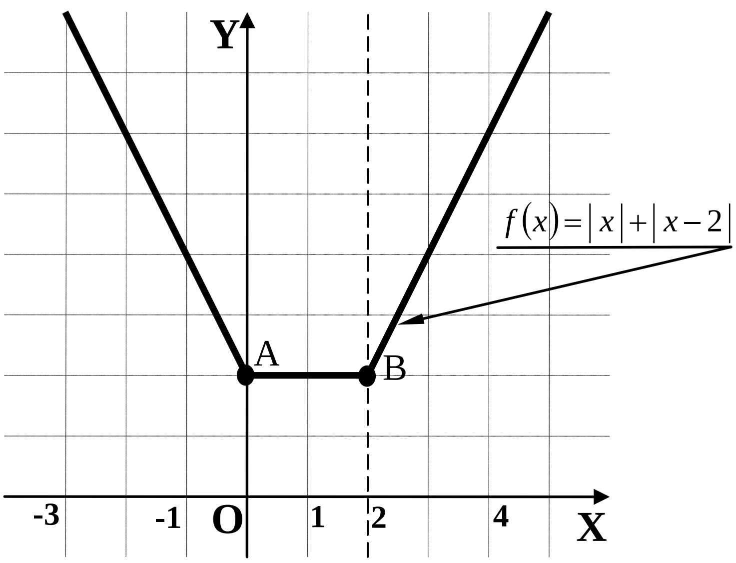
Para $x<0$ es $f(x)=-x+(-x+2)=-2x+2$.

Para $0\leq x<2$ es $f(x)=x+(-x+2)=2$.

Para $x\geq 2$ es $f(x)=x+(x-2)=2x-2$.

$$\underline{\underline{f(x)=\begin{cases} -2x+2 & si\ x<0 \\ 2 & si\ 0\leq x<2 \\ 2x-2 & si\ x\geq 2 \end{cases}}}$$

b)



La representación gráfica es la indicada en la figura.

c)

Como puede observarse por su gráfica, la función $f(x)=|x|+|x-2|$ es continua y derivable en su dominio, que es R, excepto para x = 0 y x = 2, que no es derivable por ser diferentes sus derivadas laterales en los puntos A y B.

La derivada (que es la pendiente) se anula en el intervalo donde la recta es horizontal.

$$\underline{\underline{f'(x)=0 \Rightarrow x \in (0,\ 2)}}$$

****

4º) Calcule la siguiente integral de una función racional: $I=\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx$.

$$\begin{array}{rr|l} x^2 & +1 & x^2-1 \\ \cline{3-3} -x^2 & +1 & 1 \\ \hline 0 & +2 & \end{array}$$

$$I=\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)\cdot dx=x+\int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx=\underline{x+I_1=I} \quad (*)$$

Para resolver la integral I_1 descomponemos factorialmente el denominador:

$$I_1=\int \frac{2}{x^2-1}\cdot dx=\int \frac{2}{(x+1)(x-1)}\cdot dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}\right)\cdot dx=\int \frac{Ax-A+Bx+B}{x^2-1}\cdot dx=$$

$$=\int \frac{(A+B)x+(-A+B)}{x^2-1}\cdot dx \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=0 \\ -A+B=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2B=2 \Rightarrow \underline{B=1} \;;;\; \underline{A=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1=\int\left(\frac{-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot dx=-L|x+1|+L|x-1|+K=\underline{L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+K=I_1}.$$

Sustituyendo el valor de I_1 en la expresión (*), queda finalmente:

$$\underline{\underline{I=x+L\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+k}}$$

****