PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2013

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro cuestiones de la opción elegida puntuará 2'5 puntos como máximo. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta.

OPCIÓN A

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$, estudie si existen números x e y tales que la matriz B es la inversa de la matriz A.

En primer lugar se halla la matriz inversa de A utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$$A^{-1} = B \Rightarrow = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{x = -1} \;;;\; \underline{y = 3}.$$

<u>En efecto: para x = -1 e y = 3 se cumple que A^{-1} = B.</u>

****

2º) En R^3 , calcule la distancia del punto P(1, -1, 2) a la recta r que pasa por los puntos A(0, -1, 1) y B(1, 0, 1).

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ 0,\ 1) - (0,\ -1,\ 1) = (1,\ 1,\ 0)$.

La distancia de la recta r al punto P es $d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$, siendo A un punto de r y $\overrightarrow{v_r}$ un vector director de la recta r.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ -1,\ 2) - (0,\ -1,\ 1) = (1,\ 0,\ 1)$.

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|j + k - i|}{\sqrt{1+1+0}} = \frac{|-i + j + k|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\underline{\underline{d(P,\ r) = \frac{\sqrt{6}}{2}\ unidades}}$$

****

3º) a) Define a trozos la función $f(x)=2-x\cdot|x|$ y represéntala gráficamente.

b) Estudie la derivabilidad de f(x) en toda la recta real.

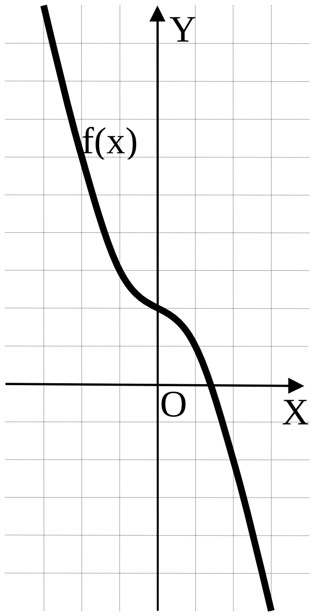
c) Calcule la función derivada f'(x) para los valores de x que exista.

----

a)

Sabiendo que $|x|=\begin{cases} -x & si\ \ x<0 \\ x & si\ \ x>0 \end{cases}$, la función $f(x)=2-x\cdot|x|$ puede redefinirse de la forma siguiente:

$$\underline{\underline{f(x)=\begin{cases} 2+x^2 & si\ \ x\le 0 \\ 2-x^2 & si\ \ x>0 \end{cases}}}$$



La representación gráfica de f(x) es la que aparece en la figura adjunta.

b - c)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto. La función f(x) es continua en su dominio, excepto para x = 0 cuya continuidad es dudosa y que comprobamos a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha son iguales e igual al valor de la función ese punto.

$$Para\ \ x=0\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-x^2\right)=f(0)=\underline{2} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2-x^2\right)=\underline{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\text{f(x) es continua en R}}.$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para x = 0, que es dudosa su derivabilidad.

Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$\underline{\underline{f'(x)=\begin{cases} 2x & si\ \ x\le 0 \\ -2x & si\ \ x>0 \end{cases}}} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=0 \\ f'(0^+)=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(0^-)=f'(0^+)}.$$

<u>La función f(x) es derivable en toda la recta real.</u>

****

4º) Calcule el valor de la integral definida: $I=\int_0^1\left[\frac{2x}{x^2+1}+(2x-1)\cdot e^{x^2-x}+2\pi\cdot sen\,(2\pi x)\right]\cdot dx$.

$$I=\int_0^1\left[\frac{2x}{x^2+1}+(2x-1)\cdot e^{x^2-x}+2\pi\cdot sen\,(2\pi x)\right]\cdot dx=$$

$$=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\cdot dx+\int_0^1 e^{x^2-x}\cdot(2x-1)\cdot dx+\int_0^1 2\pi\cdot sen\,(2\pi x)\cdot dx=\left[L\left(x^2+1\right)+e^{x^2-x}-\cos\,(2\pi x)\right]_0^1=$$

$$=\left[L(1+1)+e^{1-1}-\cos\,(2\pi)\right]-\left(L1+e^0-\cos\,0\right)=L2+e^0-1-0-1+1=\underline{\underline{L2}}\,.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Estudie para cuáles valores del parámetro m es compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones: $\left.\begin{array}{r}(1-2m)x-y-z=-1\\(m-1)x+y-z=2\\m^2x+y+z=3\end{array}\right\}$.

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones para m = 0.

----

a)

Para que un sistema de ecuaciones sea compatible determinado es condición necesaria que la matriz de coeficientes sea regular, es decir: que su determinante sea distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix}1-2m & -1 & -1\\ m+1 & 1 & -1\\ m^2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix}1-2m & -1 & -1\\ m+1 & 1 & -1\\ m^2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(1-2m)-(m+1)+m^2+m^2+(1-2m)+(m+1)=2(1-2m)+2m^2=$$

$$=2\left(1-2m+m^2\right)=2(m-1)^2=0\ \Rightarrow\ (m-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{m=1}.$$

<u>El sistema es compatible determinado para m = 1.</u>

b)

Para m = 0 el sistema es $\left.\begin{array}{r}x-y-z=-1\\-x+y-z=2\\y+z=3\end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Sumando a las dos primeras ecuaciones la tercera: $\left.\begin{array}{r}\underline{x=2}\\-x+2y=5\\y+z=3\end{array}\right\}$.

$-x+2y=5\ ;;\ -2+2y=5\ ;;\ 2y=7\ ;;\ \underline{y=\frac{7}{2}}$. $y+z=3\ ;;\ \frac{7}{2}+z=3\ ;;\ z=3-\frac{7}{2}=\underline{-\frac{1}{2}=z}$.

$$\underline{\underline{Solución:\ x=2\ ;;\ y=\frac{7}{2}\ ;;\ z=-\frac{1}{2}}}$$

****

2º) Fijados los puntos A(1, 1, 0) y B(1, 0, 1), calcule todos los puntos de la forma $X(0,\ \lambda,\ \mu)$ para los que el triángulo ABX es equilátero.

$$\overline{XA}=\overline{XB}=\overline{AB}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{array}{l} A-X=(1,\ 1,\ 0)-(0,\ \lambda,\ \mu)=\underline{(1,\ 1-\lambda,\ -\mu)} \\ \\ B-X=(1,\ 0,\ 1)-(0,\ \lambda,\ \mu)=\underline{(1,\ -\lambda,\ 1-\mu)} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sqrt{1^2+(1-\lambda)^2+(-\mu)^2}=\sqrt{1^2+(-\lambda)^2+(1-\mu)^2}\ ;;\ \sqrt{1+1-2\lambda+\lambda^2+\mu^2}=\sqrt{1+\lambda^2+1-2\mu+\mu^2}\ ;;$$

$$\sqrt{2-2\lambda+\lambda^2+\mu^2}=\sqrt{2-2\mu+\lambda^2+\mu^2}\ \Rightarrow\ \underline{\lambda=\mu}\,.$$

$$\overline{AB}=|B-A|=|(1,\ 0,\ 1)-(1,\ 1,\ 0)|=|(0,\ -1,\ 1)|=\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\underline{\sqrt{2}}\,.$$

$$\sqrt{2-2\lambda+\lambda^2+\lambda^2}=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ 2\lambda^2-2\lambda=0\ ;;\ 2\lambda(\lambda-1)=0\ \Rightarrow\ \underline{\lambda_1=0}\ ;;\ \underline{\lambda_2=1}\,.$$

<u>Los puntos que cumplen la condición pedida son $X_1(0, 0, 0)$ y $X_2(0, 1, 1)$.</u>

****

3º) a) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$.

b) Represente la función f(x) anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado a).

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{1\}}}.$$

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x-1)^2}=\infty \Rightarrow \underline{\text{No tiene asíntotas horizontales}}.$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$(x-1)^2=0 \;;;\; x-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}.$$

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-2x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-2x^2+x}=\underline{\underline{1=m}}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-2x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+2x^2-x}{x^2-2x+1}=\underline{\underline{2=n}}.$$

<u>La recta y = x + 2 es la asíntota oblicua de la función.</u>

Una función tiene un extremo relativo para los valores que anulan su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^4}=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}=\underline{\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}}.$$

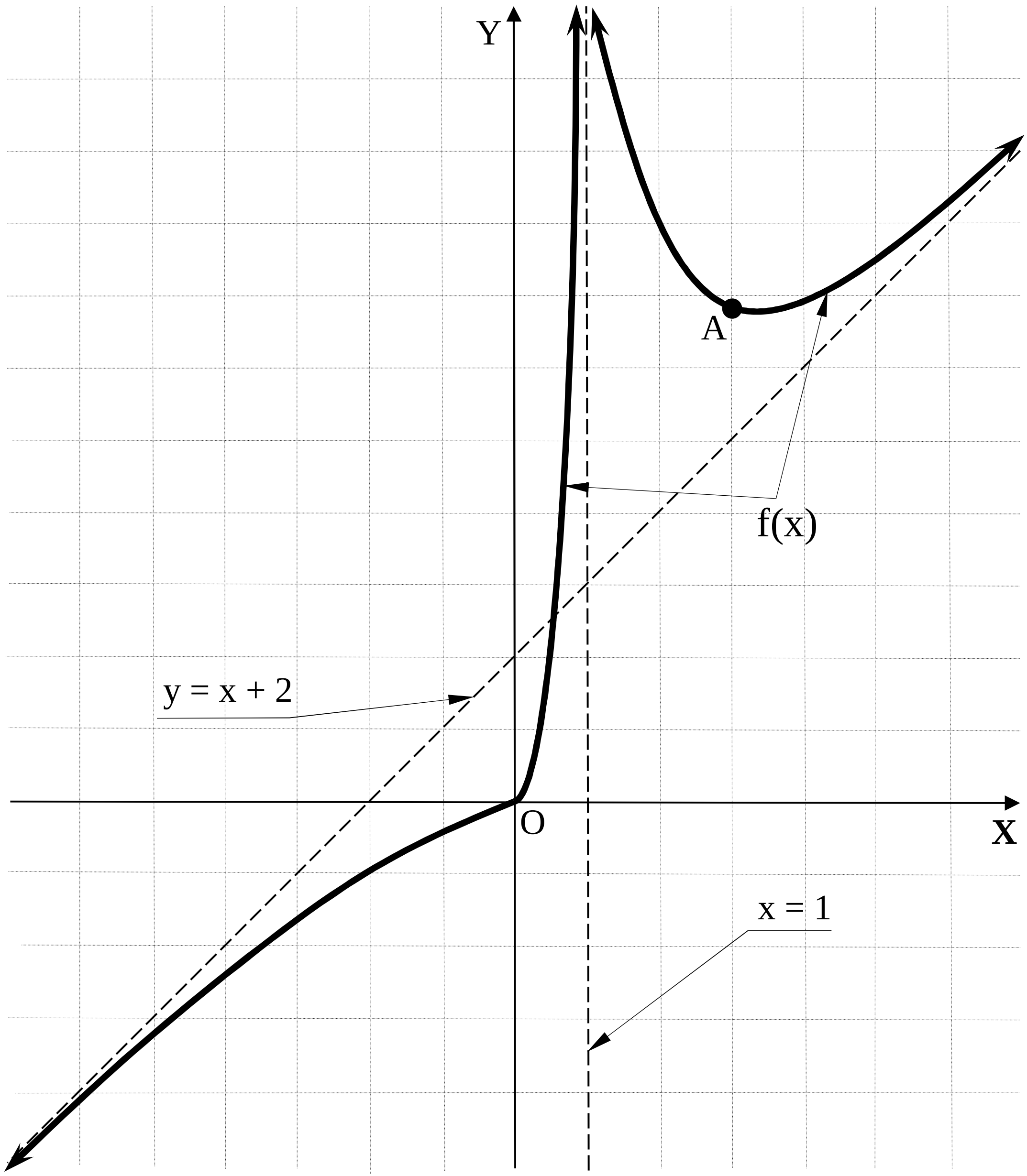
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}=0 \;;;\; x^2(x-3) \Rightarrow \underline{x_1=x_2=0} \;;;\; \underline{x_3=3}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-x^2(x-3)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{(3x^2-6x)(x-1)-x^2(x-3)\cdot 3}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{3x(x-2)(x-1)-3x^2(x-3)}{(x-1)^4}=\frac{3x(x^2-3x+2)-3x^3+9x^2}{(x-1)^4}=\frac{3x^3-9x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4}=\underline{\frac{6x}{(x-1)^4}}.$$

$f''(0)=\frac{0}{(-1)^4}=0 \Rightarrow$ Para x = 0 no haya ni máximo ni mínimo (para P. I.).



$f''(3)=\frac{6\cdot 3}{(3-1)^4}=\frac{18}{2^4}>0 \Rightarrow$ Mínimo para x = 3.

$$f(3)=\frac{3^3}{(3-1)^2}=\frac{27}{4} \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{\underline{A\left(3,\ \frac{27}{4}\right)}}.$$

Para que existe un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada y que, para los valores que la anulen, no se anule la tercera derivada.

$$f''(x)=\frac{6x}{(x-1)^4}\ ;;\ f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{6x}{(x-1)^3}=0\ ;;\ 6x=0\ \Rightarrow\ \underline{x=0}.$$

$$f'''(x)=\frac{6(x-1)^3-6x\cdot 3(x-1)^2\ \cdot 1}{(x-1)^8}=\frac{6(x-1)-18x}{(x-1)^6}=\frac{6x-6-18x}{(x-1)^6}=\frac{-12x-6}{(x-1)^6}=\frac{-6(2x+1)}{(x-1)^6}.$$

$$f'''(0)=\frac{-6(2\cdot 0+1)}{(0-1)^6}=\frac{-6}{1}=-6\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\text{Punto de inflexión para x = 0}}.$$

$$f(0)=\frac{0^3}{(0-1)^2}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P.\,I.\ \Rightarrow\ O(0,\ 0)}}.$$

b)

Con los datos anteriores se ha representado la función f(x), que es la que aparece en la figura.

****

4º) a) Dibuje el recinto limitado por la parábola $y=1-x^2$, el eje OX, la recta x = 0 y la recta x = 2.

b) Calcule el área de dicho recinto.

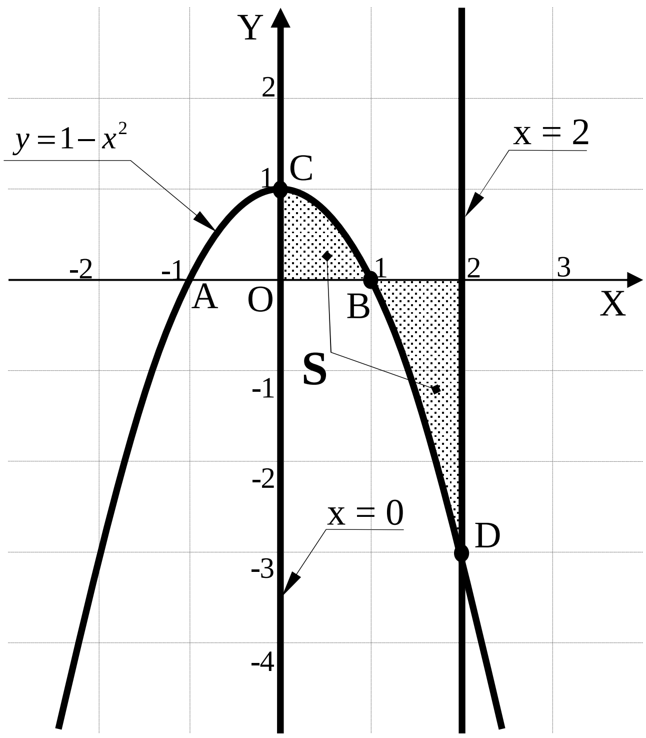
----

a)

Los puntos de corte de la parábola con las distintas rectas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y=1-x^2 \\ \\ Eje\ \ OX \end{array}\right\} \Rightarrow\ 1-x^2=0\ ;;\ x^2=1\ ;;\ x_1=-1\ ;;\ x_2=1 \Rightarrow \underline{A(-1,\ 0)}\ y\ \underline{B(1,\ 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y=1-x^2 \\ \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{C(0,\ 1)}. \qquad \left.\begin{array}{l} y=1-x^2 \\ \\ x=2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{D(2,\ -3)}.$$



b)

De la observación de la figura se deduce el área a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^1\left(1-x^2\right)\cdot dx+\int_2^1\left(1-x^2\right)\cdot dx=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_2^1=\left(1-\frac{1}{3}\right)-0+\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(2-\frac{8}{3}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{3}\right)-2+\frac{8}{3}=2-\frac{2}{3}-2+\frac{8}{3}=\frac{6}{3}=\underline{\underline{2\ u^2=S}}\ .$$

****