**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**

**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA**

**JUNIO – 2014**

(

MATEMÁTICAS II                    Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Instrucciones: El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cada una de las cuatro preguntas de la opción elegida puntuará como máximo 2'5 puntos. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a ) Estudie como es el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{array}\right\}$.

b ) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

----------

a )

La matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ambas matrices tienen de rango 2 por ser la segunda fila la suma de las otras dos.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\underline{Rango\ M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incóg. \Rightarrow Sistema\ compatible\ indeterminado.}}$$

b )

Para resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y-4z=2 \\ 2x-y-z=1 \\ x-2y+3z=-1 \end{array}\right\}$ se parametriza una de las incógnitas, por ejemplo z = λ y se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=2+4\lambda \\ 2x-y=1+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=3+5\lambda \;;;\; \underline{x=1+\tfrac{5}{3}\lambda} \;;;\; y=2+4\lambda-x=2+4\lambda-1-\tfrac{5}{3}\lambda=\underline{1+\tfrac{7}{3}\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l} x=1+\tfrac{5}{3}\lambda \\ y=1+\tfrac{7}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}\ \ o\ \ mejor\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l} x=1+5\lambda \\ y=1+7\lambda \\ z=3\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}\ .$$

**********

2º) Considere en $R^3$ las rectas $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

a ) Obtenga un vector director de la recta s.

b ) Obtenga el plano $\pi_1$ que contiene a r y es paralelo a s.

c ) Obtenga el plano $\pi_2$ que contiene a r y es perpendicular a s.

----------

a )

Un vector director de la recta s es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v'_s} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -k - k = -2k \Rightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{v_s} = (0,\ 0,\ 1)}}.$$

b )

Un punto de r es A(0, 1, 0).

Un vector director de r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{m_1} = (1,\ 0,\ 0)$ y $\overrightarrow{m_2} = (0,\ 0,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \overrightarrow{m_1} \wedge \overrightarrow{m_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ 0)}.$$

La ecuación general del plano $\pi_1$ que contiene a r y es paralelo a s es la siguiente:

$$\pi_1\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv x = 0}}.$$

c )

Debe notarse que las rectas r y s son perpendiculares por ser nulo el producto escalar de sus vectores directores: $\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (0,\ 1,\ 0) \cdot (0,\ 0,\ 1) = 0 + 0 + 0 = 0$.

El haz de planos $\psi$ perpendiculares a la recta s tiene como vector normal al vector director de la recta s, que es $\overrightarrow{v_s} = (0,\ 0,\ 1)$; su expresión general es $\psi \equiv Cz + D = 0$.

Conocida la condición de perpendicular de las rectas r y s, el plano $\pi_2$ pedido, perteneciente al haz de planos ψ, tiene que contener a un punto de r, por ejemplo el punto conocido A(0, 1, 0).

$$\left.\begin{array}{l}\psi \equiv Cz + D = 0 \\ A(0,\ 1,\ 0)\end{array}\right\} \Rightarrow C \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow \underline{D = 0} \Rightarrow \underline{\underline{\pi_2 \equiv z = 0}}\,.$$

**********

3º) a ) Enuncie la condición que debe cumplir para que una recta $x = a$ sea asíntota vertical de una función $f(x)$.

b ) Calcule las asíntotas horizontales (en -∞ y en +∞) de la función $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2}$.

----------

a )

Una función $f(x)$ tiene una asíntota vertical cuando expresada adecuadamente es racional y tiene como factor en el denominador a la expresión $(x - a)$.

b )

Siendo $x^2 - x - 2 = 0$ ;; $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$, la expresión anterior puede ponerse de la forma $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, con lo cual la función puede expresarse de la forma $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)}$.

<u>Las rectas x = 1 y x = 2 son asíntotas verticales de la función</u>.

Las tendencias de las asíntotas dependen de sus límites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1+1-1}{0^- \cdot (-2)} = \frac{1}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}}.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1+1-1}{0^+ \cdot (-2)} = \frac{1}{0^-} = \underline{\underline{-\infty}}.$$

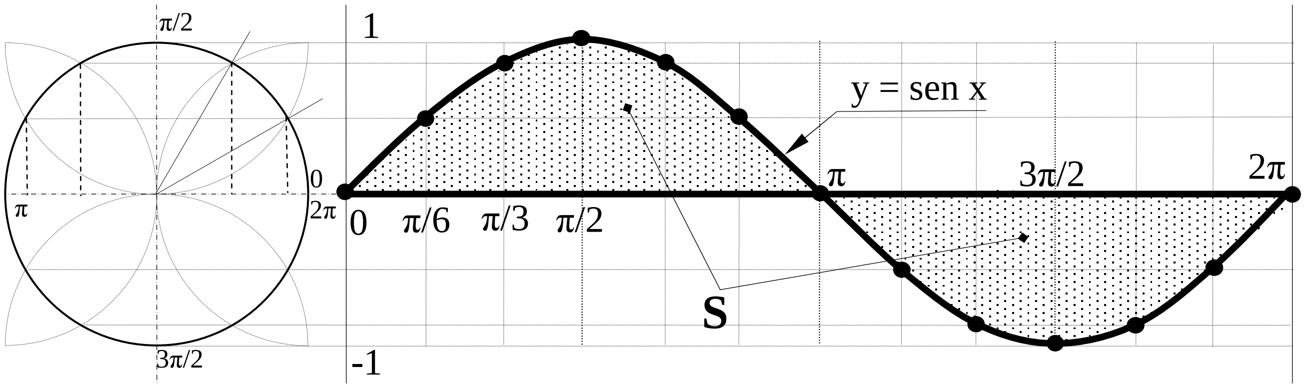
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{4+2-1}{1 \cdot 0^-} = \frac{5}{0^-} = \underline{\underline{-\infty}}.$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)(x-2)} = \frac{4+2-1}{1 \cdot 0^+} = \frac{5}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}}.$$

**********

4º) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x)=sen\ x$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2\pi$.

----------




La gráfica de la función $f(x)=sen\ x$ es la de la figura, de la cual se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_0^{\pi} sen\ x\cdot dx+\int_{2\pi}^{\pi} sen\ x\cdot dx=\left[-\cos\ x\right]_0^{\pi}+\left[-\cos\ x\right]_{2\pi}^{\pi}=\left[\cos\ x\right]_{\pi}^{0}+\left[\cos\ x\right]_{\pi}^{2\pi}=$$

$$=(\cos 0-\cos \pi)+(\cos 2\pi-\cos \pi)=1-(-1)+1-(-1)=\underline{\underline{4\ u^2=S}}$$

**********

OPCIÓN B

1º) a ) Calcule el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

b ) Calcule la matriz inversa de A.

c ) Calcule el determinante de la matriz $B=\frac{1}{2}A^3$ sin obtener previamente B.

----------

a )

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&-1&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&2\\-1&0\end{vmatrix}=1\cdot 2=\underline{\underline{2}}\,.$$

b )

$$A^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\1&2&0\end{pmatrix}. \qquad Adj.\ de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\2&0\end{pmatrix}&-\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}\\-\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}&-\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}&-\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&-1&0\\0&0&-2\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-1\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}}}$$

c )

$$B=\tfrac{1}{2}A^3=\tfrac{1}{2}\cdot A\cdot A\cdot A=\left(\tfrac{1}{2}\cdot A\right)\cdot A\cdot A\,.$$

$$|B|=\left|\left(\tfrac{1}{2}\cdot A\right)\cdot A\cdot A\right|=\left|\tfrac{1}{2}\cdot A\right|\cdot|A|\cdot|A|=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2\right]\cdot 2\cdot 2=\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot 2^3=\left(\frac{2}{2}\right)^3=1^3=\underline{\underline{1}}\,.$$

Se ha tenido en cuenta que la matriz cuadrada A es de orden tres y las siguientes propiedades de las matrices y los determinantes:

1.- El determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices.

2.- Si se multiplica una matriz por un número resulta otra matriz cuyos elementos quedan todos y cada uno de ellos multiplicados por dicho número.

3.- Si se multiplican los elementos de una línea de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

**********

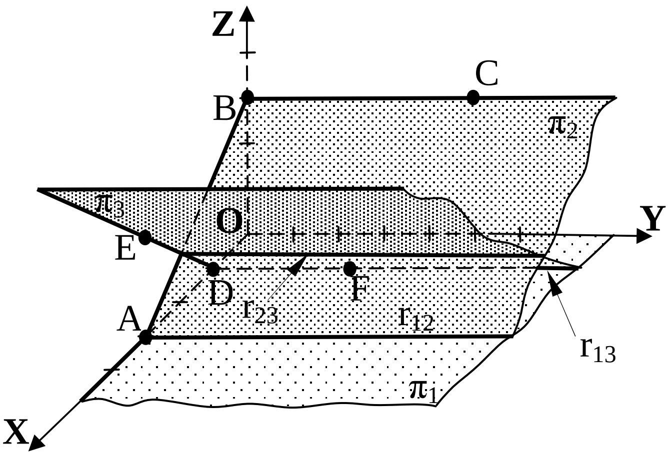
2º) a ) Dado el plano $\pi_1 \equiv z = 0$, escriba las ecuaciones de los planos $\pi_2$ y $\pi_3$ tales que los planos $\pi_1$, $\pi_2$ y $\pi_3$ se corten dos a dos pero no exista ningún punto común de los tres.

b ) Clasifique el sistema formado por las ecuaciones de los planos $\pi_1$, $\pi_2$ y $\pi_3$.

----------

a )

A título de ejemplo, el dibujo adjunto expresa una situación real de la cuestión pedida.




Los puntos que determinan los planos $\pi_2$ y $\pi_3$ son los siguientes:

$\pi_2 \rightarrow$ A(3, 0, 0), B(0, 0, 3) y C(0, 5, 3).

$\pi_3 \rightarrow$ D(1, 0, 0), E(3, 0, 2) y F(1, 3, 0).

Las ecuaciones generales de los planos $\pi_2$ y $\pi_3$ son las que se obtienen a continuación.

Los puntos A(3, 0, 0), B(0, 0, 3) y C(0, 5, 3) determinan los siguientes vectores: $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{AB} = (-3,\ 0,\ 3)$ y $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AC} = (-3,\ 5,\ 3)$.

$$\pi_2(A;\ \overrightarrow{m},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -3 & 0 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -9y-15z-15(x-3)+9y=0\ ;;\ z+x-3=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{\pi_2 \equiv x+z-3=0}$.

Los puntos D(1, 0, 0), E(3, 0, 2) y F(1, 3, 0) determinan los siguientes vectores: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{DE} = (2,\ 0,\ 2)$ y $\overrightarrow{q} = \overrightarrow{DF} = (0,\ 3,\ 0)$.

$$\pi_3(D;\ \overrightarrow{p},\ \overrightarrow{q}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 6z-6(x-1)=0\ ;;\ z-x+1=0 \Rightarrow \underline{\pi_3 \equiv x-z-1=0}.$$

<u>Los planos pedidos pueden ser los hallados, $\pi_2$ y $\pi_3$.</u>

b )

El sistema formado por los tres planos es $\left.\begin{matrix} z=0 \\ x+z=3 \\ x-z=1 \end{matrix}\right\}$, que es incompatible, lo que significa que los tres planos no tienen puntos en común, determinando en sus cortes (dos a dos) tres rectas que son paralelas, como se comprueba a continuación.

Los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ determinan la recta $r_{12} \equiv \begin{cases} z=0 \\ x+z=3 \end{cases}$, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 1)$:

$$\overrightarrow{v'_{12}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-(-j)=j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_{12}}=(0,\ 1,\ 0)}.$$

Los planos $\pi_1$ y $\pi_3$ determinan la recta $r_{13} \equiv \begin{cases} z=0 \\ x-z=1 \end{cases}$, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_3}=(1,\ 0,\ -1)$:

$$\overrightarrow{v'_{13}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} i & j \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-(-j)=j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_{13}}=(0,\ 1,\ 0)}.$$

Los planos $\pi_2$ y $\pi_2$ determinan la recta $r_{23} \equiv \begin{cases} x+z=3 \\ x-z=1 \end{cases}$, cuyo vector director es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_3}=(1,\ 0,\ -1)$:

$$\overrightarrow{v'_{23}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-j\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-j\cdot(-1-1)=-2j \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_{23}}=(0,\ 1,\ 0)}.$$

La igualdad de los tres vectores directores justifica la comprobación que buscábamos.

**********

3º) a ) Enuncie el teorema de Bolzano.

b ) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene soluciones positivas.

c ) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.

----------

a )

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [α, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

b )

Considerando la función $f(x) = \cos x - x^2 + 1$, continua en su dominio, que es el conjunto de los números reales, por estar formada por la suma de tres funciones continuas que tienen el dominio expresado.

La función f(x) cumple los requisitos necesarios para aplicarle el Teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado considerado.

Demostrar que la función $f(x) = \cos x - x^2 + 1$ tiene soluciones positivas es equivalente a demostrar que, por lo menos un valor de x > 0, f(x) cumple con el teorema de Bolzano.

Considerando el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f(0) = \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2 > 0.$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1 = -\frac{\pi^2}{4} + 1 = \frac{-\pi^2 + 4}{4} < 0.$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene al menos una solución positiva, como teníamos que probar.

c )

Teniendo en cuenta que $f(-x) = \cos(-x) - (-x)^2 + 1 = \cos x - x^2 + 1 = f(x)$, la función f(x) es simétrica con respecto al eje de ordenadas y, como consecuencia, la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene por lo menos una solución negativa, por tener una solución positiva.

**********

4º) Calcule la siguiente suma de integrales definidas:

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3} \cdot dx + \int_\pi^{2\pi} \left(-sen\ x \cdot e^{sen\ x} + \cos^2 x \cdot e^{sen\ x}\right) \cdot dx \text{ ,}$$

cuyas integrales indefinidas asociadas son inmediatas.

----------

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3} \cdot dx + \int_\pi^{2\pi} \left(-sen\ x \cdot e^{sen\ x} + \cos^2 x \cdot e^{sen\ x}\right) \cdot dx = \left[-2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 + \left[\cos\ x \cdot e^{sen\ x}\right]_\pi^{2\pi} =$$

$$= \left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2 + \left[\cos\ x \cdot e^{sen\ x}\right]_\pi^{2\pi} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} + \left[\cos\left(2\pi\right) \cdot e^{sen\ (2\pi)}\right] - \left(\cos\ \pi \cdot e^{sen\ \pi}\right) = \frac{1}{4} - 1 + 1 \cdot e^0 - \left[(-1) \cdot e^0\right] =$$

$$= -\frac{3}{4} + 1 \cdot 1 - (-1 \cdot 1) = \frac{1}{4} + 1 = \underline{\frac{5}{4}} \text{ .}$$

$$\underline{\underline{\int_1^2 \frac{-2}{x^3} \cdot dx + \int_\pi^{2\pi} \left(-sen\ x \cdot e^{sen\ x} + \cos^2 x \cdot e^{sen\ x}\right) \cdot dx = \frac{5}{4}\ u^2}} \text{ .}$$

**********