PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2015

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) a) Enuncie el teorema del valor medio de Lagrange.

b) Aplicando a la función $f(x) = x^3 + 2x$ el anterior teorema, pruebe que cualquiera que sean los números α < b se cumple la desigualdad α – b < $b^3 - a^3$.

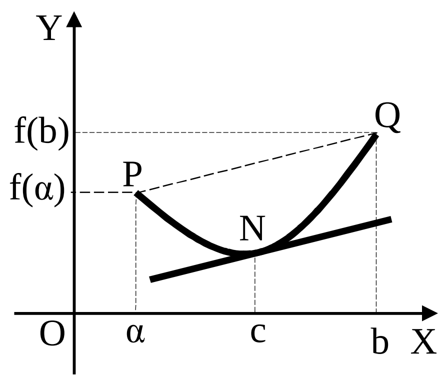
----

a)

El teorema del valor medio del cálculo diferencial, también conocido como teorema de Lagrange, se puede enunciar del siguiente modo:

"Si f(x) es una función continua en el intervalo [α, b] y derivable en (α, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (\alpha, b)$ que cumple $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$".

La interpretación geométrica puede apreciarse fácilmente en la figura adjunta.



Considerando la función f(x), continua en [α, b] y derivable en (α, b) existe, por lo menos un punto N perteneciente al intervalo (α, b) en el que la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la cuerda que une los puntos P y Q de coordenadas P [α, f (α)] y Q [b, f (b)].

b)

La función $f(x) = x^3 + 2x$ es continua y derivable en R, por lo cual, se le puede aplicar el teorema de Lagrange en cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo (ɑ, b) con ɑ < b:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 + 2 .$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow 3c^2 + 2 = \frac{(b^3+2b)-(a^3+2a)}{b-a} = \frac{b^3+2b-a^3-2a}{b-a} =$$

$$= \frac{b^3-a^3+2b-2a}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} + \frac{2(b-a)}{b-a} = \frac{b^3-a^3}{b-a} + 2 \Rightarrow \boldsymbol{3c^2 = \frac{b^3-a^3}{b-a}}.$$

Como quiera que $3c^2 > 0, \forall c \in R \Rightarrow \frac{b^3-a^3}{b-a} >$ cualquier valor negativo.

Considerando $\frac{b^3-a^3}{b-a} > -1 = -\frac{a-b}{a-b} = \frac{a-b}{b-a} \Rightarrow b^3 - a^3 > a - b$, o sea:

$$\underline{a - b < b^3 - a^3, como\ ten\acute{\imath}amos\ que\ comprobar}.$$

****

2º) $a)$ Diga cuándo una función F(x) es una primitiva de otra función f(x).

$b)$ Diga cómo puede comprobarse, sin necesidad de hacer derivadas, si dos funciones F(x) y G(x) son primitivas de una misma función.

$c)$ Diga si las funciones $F(x)=\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x}$ y $G(x)=\frac{1-sen^2 x}{\cos x\cdot \operatorname{sen} x}$, razonando la respuesta, si son primitivas de una misma función.

$a)$

Se dice que una función F(x) es una primitiva de f(x) si se cumple que F'(x) = f(x); como quiera que la derivada de F(x) + C es la misma que la de F(x), existen infinitas funciones primitivas de una función dada, que son todas aquellas que se diferencian en una constante (C).

Lo anterior se expresa de la forma: $\int f(x)\cdot dx=F(x)+C$.

$b)$

Dos funciones $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son primitivas de una función f(x) siempre que la diferencia de las dos primeras sea constante: $F_1(x) - F_2(x) = C$.

$c)$

$$F(x)=\frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{\operatorname{sen} x}=1+\frac{\cos x}{sen\ x}=cotg\ x+1.$$

$$G(x)=\frac{1-sen^2 x}{\cos x\cdot \operatorname{sen} x}=\frac{cos^2 x}{\cos x\cdot \operatorname{sen} x}=\frac{\cos x}{sen\ x}=cotg\ x.$$

Las funciones F(x) y G(x) son primitivas de una misma función por diferenciarse en una constante (1).

****

3º) Siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación matricial AX + 2B = C.

$A \cdot X + 2B = C \;;\; A \cdot X = C - 2B$. Multiplicando por la izquierda por A^{-1}:

$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 2B) \;;\; I \cdot X = A^{-1} \cdot (C - 2B) \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - 2B)$.

$$C - 2B = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot (C - 2B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4 & 2 + 0 \\ -1 - 8 & -2 - 0 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}}.$$

****

4º) a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $A(0,\ 1,\ 1)$ y B (1, 1, -1).

b) Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = B - A = (1, 0, -2)$.

Considerando el punto A, la recta r pedida es $\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}}$.

b)

Los planos π_1 y π_2 tienen los siguientes planos bisectores:

$\frac{x+y+2}{\pm\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{x-z-1}{\pm\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x + y + 2 = x - z - 1 \\ x + y + 2 = -x + z + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \equiv y + z + 3 = 0$ y $\alpha_2 \equiv 2x + y - z + 1 = 0$.

Los puntos pedidos son los puntos de corte de la recta r con los planos π_1 y π_2:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \\ \alpha_1 \equiv y + z + 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + (1 - 2\lambda) + 3 = 0\ ;;\ 4 + 1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2}.$$

$$P_1 \Rightarrow \left. \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 1 \\ z = 1 - 5 = -4 \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)}.$$

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \\ \alpha_2 \equiv 2x + y - z + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\lambda + 1 - (1 - 2\lambda) + 1 = 0\ ;;$$

$2\lambda + 2 - 1 + 2\lambda = 0\ ;;\ 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4}$.

$$P_2 \Rightarrow \left. \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = 1 \\ z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{P_2\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)}.$$

****

OPCIÓN B

1º) a) Estudie el dominio de definición y las asíntotas de la función $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-2}$.

b) Estudie si la gráfica de la función f(x) corta a alguna asíntota oblicua suya.

c) Represente, aproximadamente, la gráfica de f(x) utilizando los valores f (1) y f (3), y los datos obtenidos en los apartados a) y b).

----

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R-\{2\}}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x-2=0 \Rightarrow$ La recta x = 2 es asíntota vertical de la función.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right]$.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+3}{x^2-2x}=1.$

$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+3}{x-2}-x\right)=$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+3-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x+3}{x-2}=-2=n.$

La recta y = x – 2 es asíntota oblicua de la función.

b)

Los puntos de corte de la función con la asíntota oblicua son las soluciones del sistema que forman sus expresiones:

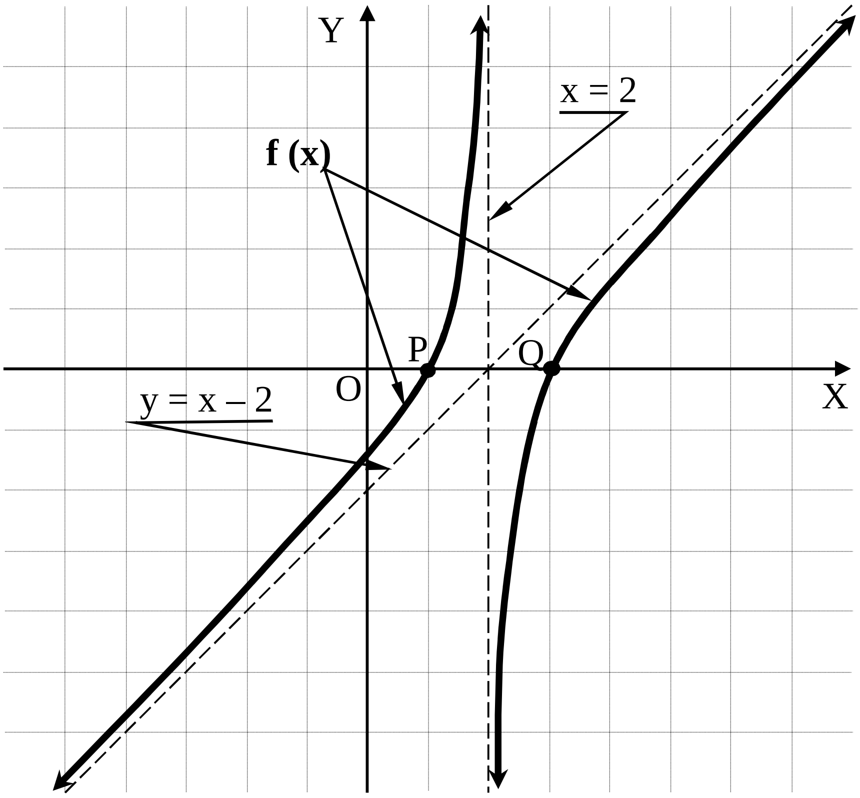
$\left.\begin{array}{l} y=f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x-2} \\ y=x-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+3}{x-2}=x-2\ ;;\ x^2-4x+3=x^2-4x+4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3=4? \Rightarrow$ Incompatible $\Rightarrow$ La asíntota oblicua no corta a la función.

$c)$

$f(1) = \frac{1-4+3}{1-2} = 0 \Rightarrow \underline{P(1,0)}.$ $\qquad$ $f(3) = \frac{9-12+3}{3-2} = 0 \Rightarrow \underline{Q(3,0)}.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

2º) Calcule la integral definida de una función racional: $I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$.

Se resuelve en primer lugar la integral indefinida $A = \int \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx$:

$$A = \int \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-2x} = \frac{x-1}{x(x-2)} = \frac{M}{x} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx}{x(x-2)} = \frac{(M+N)x-2M}{x(x-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1 \\ -2M=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow M = N = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \right) \cdot dx = \frac{1}{2} [L|x| + L|x-2|] + C.$$

Resolvemos ahora la integral definida:

$$I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot [L|x| + L|x-2|]_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[L\left(1+\sqrt{5}\right) + L\left(1+\sqrt{5}-2\right) \right] - \left[L\left(1+\sqrt{2}\right) + L\left(1+\sqrt{2}-2\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left[L\left(\sqrt{5}+1\right) + L\left(\sqrt{5}-1\right) \right] - \left[L\left(\sqrt{2}+1\right) + L\left(\sqrt{2}-1\right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left\{ L\left[\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)\right] - L\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right] \right\} = \frac{1}{2} \cdot [L(5-1) - L(2-1)] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (L4 - L1) = \frac{1}{2} L \frac{4}{1} = \frac{1}{2} L4 = \frac{1}{2} L2^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot L2 = L2.$$

$$\underline{I = \int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x} \cdot dx = L2.}$$

****

3º) Determine el rango de la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{pmatrix}$, según los valores de b.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{vmatrix} = b+2+(b+2)(b+1)-(b+1)-1-2b(b+2) =$$

$$= b+1+b^2+b+2b+2-b-1-2b^2-4b = -b^2-b+2 = 0.$$

$$b^2+b-2=0\ ;;\ b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow b_1 = -2, b_2 = 1.$$

$$\underline{Rango\ de\ A = 3, \forall b \in R - \{-2,1\}}.$$

Para b = -2 es A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y para b = 1 es A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Como en ambos casos existen menores de orden dos distintos de cero, como por ejemplo son: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, respectivamente:

$$\underline{Para\ b = -1\ y\ b = 1 \Rightarrow\ Rango\ de\ A = 2}.$$

****

4º) Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de R^3 tales que $\vec{e} \times \vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} \times \vec{e} = (0, 1, 1)$.

$a)$ Calcule el vector $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e})$.

$b)$ Calcule el vector $\vec{w} = \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v})$.

$a)$

$$(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k + i - j = i - j + k.$$

$$\underline{(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = (1, -1, 1)}.$$

$b)$

Para la resolución de este apartado deben tenerse en cuenta las siguientes propiedades del producto vectorial:

1ª.- Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma por la izquierda y por la derecha.

2ª.- Los escalares pueden extraerse del producto vectorial.

3ª.- El producto vectorial de un vector por sí mismo es el vector nulo.

4ª.- El producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{m} \times \vec{n} = -(\vec{n} \times \vec{m})$.

$$\vec{w} = \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v}) = 2 \cdot \vec{e} \times \vec{u} - \vec{e} \times \vec{e} + 3 \cdot \vec{e} \times \vec{v} =$$

$$= 2 \cdot (1,0,-1) - (0,0,0) - 3 \cdot \vec{v} \times \vec{e} = (2,0,-2) - 3 \cdot (0,1,1) =$$

$$= (2,0,-2) + (0,-3,-3) = (2,-3-5).$$

$$\underline{\vec{w} = (2,-3,-5)}.$$

****