PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2016

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno elegirá una de las dos opciones propuestas. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Determine los números reales a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} ax+by+3z=2 \\ x+2y-z=0 \\ 3x-y+z=1 \end{array}\right\}$ tiene al menos dos soluciones distintas.

Primera forma:

Si un sistema tiene al menos dos grupos de soluciones es que es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & b & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & b & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función de los parámetros a y b es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & b & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2a-3-3b-18-a-b=\boldsymbol{a-4b-21}. \qquad (1)$$

Por existir en la matriz M el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ es $Rang\ M \geq 2$.

Por ser tres el número de incógnitas, para que el sistema sea compatible indeterminado tiene que ser $Rang\ M = Rang\ M' = 2$.

$$Rang\ M' = 2 \Rightarrow \begin{array}{l} \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} b & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{array} \left. \right\} \left. \begin{array}{r} -a + 2 + 6 - 3 = 0 \\ -b + 4 - 2 - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{a = 5;\ \ b = -4}.$$

Segunda forma:

Sabiendo de antemano que el sistema es compatible indeterminado, se trata de resolverlo.

Para resolver el sistema compatible indeterminado $\left. \begin{array}{r} ax + by + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{array} \right\}$ se elimina una de las ecuaciones (primera) y se parametriza una de las incógnitas: $z = \lambda$.

$$\left. \begin{array}{r} x + 2y = \lambda \\ 3x - y = 1 - \lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} x + 2y = \lambda \\ 6x - 2y = 2 - 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 7x = 2 - \lambda;\ \ \boldsymbol{x = \frac{2}{7} - \frac{1}{7}\lambda}.$$

$$3x - y = 1 - \lambda;\ \ y = 3x - 1 + \lambda = \frac{6}{7} - \frac{3}{7}\lambda - 1 + \lambda \Rightarrow \boldsymbol{y = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}\lambda}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación los valores obtenidos de x e y:

$$\frac{2a}{7} - \frac{a}{7}\lambda - \frac{b}{7} + \frac{4b}{7}\lambda + 3\lambda = 2;\ \ \left(\frac{2a}{7} - \frac{b}{7}\right) + \left(-\frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + 3\right)\lambda = 2\ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} \frac{2a}{7} - \frac{b}{7} = 2 \\ -\frac{a}{7} + \frac{4b}{7} + 3 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 2a - b = 14 \\ -a + 4b + 21 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 2a - b = 14 \\ -a + 4b = -21 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 2a - b = 14 \\ -2a + 8b = -42 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7b = -28\ \ \Rightarrow\ \ \underline{b = -4}.$$

$$2a - (-4) = 14;\ \ 2a + 4 = 14\ \ \Rightarrow\ \ \underline{a = 5}.$$

****

2º) En $\mathbb{R}^3$, sea el plano $\pi \equiv x - z = 2$, y sea r la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 0, b)$.

$a)$ Calcule un vector director de la recta r.

$b)$ Determine b para que r y π sean perpendiculares.

$c)$ Determine b para que r y π sean paralelos.

$d)$ ¿Está r contenida en π para algún valor de b? Razone la respuesta.

$a)$

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{BA}$.

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(1, 0, 0) - (0, 0, b)] = (1, 0, -b).$

$$\underline{\overrightarrow{v_r} = (1, 0, -b)}.$$

$b)$

Un vector perpendicular (normal) del plano π es $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, es decir, que sean proporcionales sus componentes:

$\frac{1}{1} = \frac{0}{0} = \frac{-b}{-1} \Rightarrow 1 = \frac{b}{1} \Rightarrow b = 1.$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ perpendiculares\ para\ b = 1}.$$

$c)$

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (1, 0, -b) \cdot (1, 0, -1) = 0;\ \ 1 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = -1.$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos\ para\ b = -1}.$$

$d)$

Una forma de resolver el apartado es la siguiente:

Un plano contiene a una recta cuando contiene a dos puntos de la recta.

Los puntos $A(1,0,0)$ y $B(0,0,b)$ pertenecen a la recta r por definición.

Un plano contiene a un punto cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x - z = 2 \\ A(1,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 0 \neq 2 \ \Rightarrow \boldsymbol{A} \notin \boldsymbol{\pi}.$$

$\underline{La\ recta\ r\ no\ est\acute{a}\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi\ para\ ning\acute{u}n\ valor\ real\ de\ b.}$

****

3º) $a)$ Enuncie el teorema de Rolle.

$b)$ Dado un número real λ, utilice el teorema de Rolle para probar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ no tiene dos raíces distintas.

$c)$ ¿Tiene el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ alguna raíz? Justifique la respuesta.

$a)$

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$b)$

Considerando la función $f(x) = x^3 + x + \lambda$, que por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere.

$P'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in R$, lo cual implica que $f(x) = x^3 + x + \lambda$ es monótona creciente en R, por lo cual:

$$\underline{El\ polinomio\ P(x)\ no\ puede\ tener\ dos\ raíces\ iguales.}$$

$c)$

Siendo la función $f(x) = x^3 + x + \lambda$ monótona creciente en R, implica, necesariamente, que corta al eje X en algún punto, lo que justifica que:

$$\underline{\exists \lambda \in R\ para\ el\ cual\ el\ polinomio\ P(x) = x^3 + x + \lambda\ tiene\ una\ raíz\ real.}$$

****

4º) Calcule el valor de la integral definida $I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx$, donde $a = (e-1)^2$. [El cálculo de la integral indefinida puede hacerse con el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ (es decir, $x = t^2$), o también con el cambio de variable $u = \sqrt{x}$+1].

Primero: con el cambio $t = \sqrt{x}$.

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t = \sqrt{x} \to x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = a \to t = \sqrt{a} \\ x = 0 \to t = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot 2t \cdot dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{t}{t+1} \cdot dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{t+1-1}{t+1} \cdot dt = 2\int_0^{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) \cdot dt =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{a}} dt - 2\int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot dt = 2A - 2B. \quad (*)$$

$$A = \int_0^{\sqrt{a}} dt = [t]_0^{\sqrt{a}} = \sqrt{a} = \sqrt{(e-1)^2} = e - 1.$$

$$B = \int_0^{\sqrt{a}} \frac{1}{t+1} \cdot dt \Rightarrow \left\{\begin{matrix} t + 1 = h \\ dt = dh \end{matrix} \middle| \begin{matrix} t = \sqrt{a} \to h = \sqrt{a} + 1 \\ t = 0 \to h = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{h} \cdot dh =$$

$$= [Lh]_1^{\sqrt{a}+1} = \left[L\left(\sqrt{a}+1\right) - L1\right] = L\left(\sqrt{a}+1\right) = L\left[\sqrt{(e-1)^2} + 1\right] =$$

$$= L(e - 1 + 1) = Le = 1.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos:

$$I = 2(A - B) = 2(e - 1 - 1) = 2(e - 2).$$

$$\underline{I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx = 2(e-2).}$$

Segundo: con el cambio $u = \sqrt{x} + 1$.

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = \sqrt{x} + 1 \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \to dx = 2(u-1)du \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = a \to u = \sqrt{a} + 1 \\ x = 0 \to u = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{u} \cdot 2(u-1) \cdot du = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{u-1}{u} du = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \left(1 - \frac{1}{u}\right) du =$$

$$= 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} du - 2 \cdot \int_1^{\sqrt{a}+1} \frac{1}{u} du = 2 \cdot [u]_1^{\sqrt{a}+1} - 2 \cdot [Lu]_1^{\sqrt{a}+1} =$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{a} + 1 - 1\right) - 2 \cdot \left[L\left(\sqrt{a} + 1\right) - L1\right] = 2\sqrt{a} - 2\left[L\left(\sqrt{a} + 1\right) - 0\right] =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(e-1)^2} - 2 \cdot L\left(\sqrt{(e-1)^2} + 1\right) = 2(e-1) - 2 \cdot L(e - 1 + 1) =$$

$$= 2(e-1) - 2 \cdot Le = 2e - 2 - 2 = 2e - 4 = 2(e-2).$$

$$\underline{I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot dx = 2(e-2).}$$

****

OPCIÓN B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga las matrices X que cumplen la igualdad $AX + B^2 - 2A = 0$.

$$AX + B^2 - 2A = O;\ \ AX = 2A - B^2 = M;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot M;$$

$I \cdot X = A^{-1} \cdot M \ \Rightarrow\ \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot M}$.

$$M = 2A - B^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{4} & \boldsymbol{-2} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}.$$

La matriz A^{-1} se obtiene por el método de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow\ \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión de X:

$$X = A^{-1} \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) En $\mathbb{R}^3$, considere el punto $P(1,0,1)$ y los planos $\pi_1 \equiv x+z=0, \pi_2 \equiv y-z=0$. Obtenga un plano π_3 que cumpla a la vez las siguientes condiciones:
$i)$ $P \in \pi_3$; $ii)$ π_1 corta a π_3 en una recta; $iii)$ Los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen puntos en común.

Sea el plano pedido $\pi_3 = Ax+By+Cz+D=0$.

De $i)$ → Por contener a $P(1,0,1) \Rightarrow \boldsymbol{A+C+D=0}$.   (1)

De $ii)$ → Los planos π_1 y π_3 se cortan en la recta r.

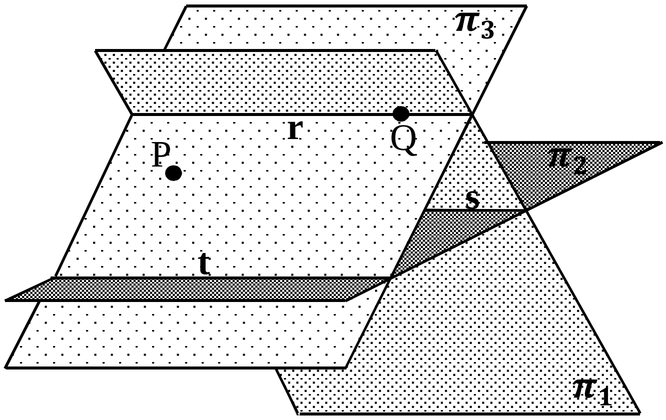
$iii)$ Los planos π_1, π_2 y π_3 no tienen puntos en común, es decir, que se cortan dos a dos, como se observa en el dibujo que se adjunta.

La recta s en que se cortan π_1 y π_2 es $s \equiv \begin{cases} x+z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$z=\mu;\ \ x=-\mu;\ y=\mu\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ s \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.



Las rectas r, s y t donde se cortan los planos dos a dos son paralelas.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v_s}=(-1,1,1)$.

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$z=\lambda;\ \ x=-\lambda;\ -A\lambda+By+C\lambda=-D;\ \ y=\frac{A\lambda-C\lambda-D}{B}=-\frac{D}{B}+\frac{A-C}{B}\lambda\ \Rightarrow$

$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=-\frac{D}{B}+\frac{A-C}{B}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.   Un punto de r es $Q\left(0,-\frac{D}{B},0\right)$.

$\overrightarrow{QP}=[P-Q]=\left[(1,0,1)-\left(0,-\frac{D}{B},0\right)\right]=\left(1,\frac{D}{B},1\right)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{QP}$ son directores del plano π_3, que contiene a $P(1,0,1)$.

La expresión general del plano π_3 es la siguiente:

$$\pi_3\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\overrightarrow{QP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ B & D & B \end{vmatrix} = 0;$$

$B(x-1) + By - D(z-1) - B(z-1) - D(x-1) - By = 0;$

$Bx - B - Dz + D - Bz + B - Dx + D = 0;\ \ Bx - Dz - Bz - Dx + 2D = 0;$

$(B-D)x + (-B-D)z + 2D = 0.$

Teniendo en cuenta que $\pi_3 = Ax + By + Cz + D = 0$, se deduce que $B = 0$, con lo que resulta:

$$\pi_3 \equiv -Dx - Dz + 2D = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\pi_3 \equiv x + z - 2 = 0}.$$

****

3º) a) Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función $f(x)=\frac{2x-1}{-x^2+x}$.

b) Utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

----

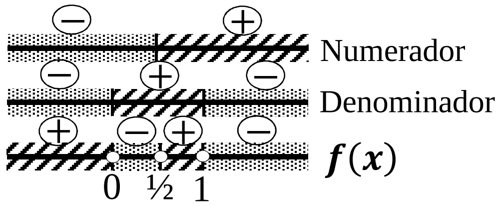
a)

El dominio de una función racional es el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$-x^2+x=0;\ -x(x-1)=0\ \Rightarrow\ x_1=0, x_2=1.$$

$$\underline{D(f)\Rightarrow R-\{0,1\}}.$$

Para estudiar el signo de la función tenemos en cuenta, además de las raíces halladas del denominador que la raíz del numerador es $x=½$. Además, nos valemos del gráfico adjunto para determinar el signo de la función.



$$\underline{f(x)<0\Rightarrow x\in(0,½)\cup(1,+\infty)}.$$

$$\underline{f(x)>0\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(½,1)}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

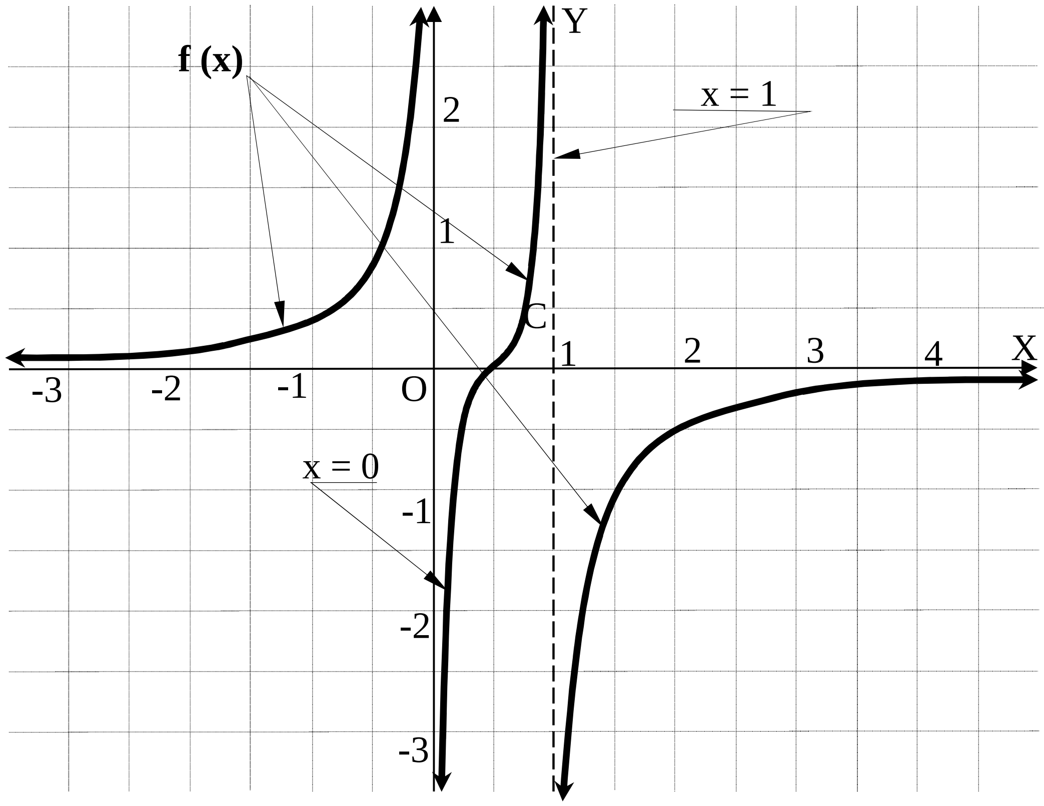
$$k=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{-x^2+x}=0\Rightarrow \underline{La\ recta\ y=0\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ rectas\ x=0\ y\ x=1\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

b)

Utilizando todos los datos obtenidos en el apartado anterior puede hacerse un gráfico bastante aproximado de la función, que es el que sigue:



f (x)
Y
x = 1
2
1
C
1
2
3
4
X
-3
-2
-1
O
x = 0
-1
-2
-3

****

4º) a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule la derivada de la función $f(x) = L(cos^2 x), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

c) Obtenga, utilizando el apartado b), una primitiva $G(x)$ de la función $g(x) = tg\ x$ que cumpla $G(0) = 1$.

----

a)

La regla de la cadena se utiliza para derivar funciones compuestas, es decir, funciones que son, a la vez, funciones de otras funciones. Si una función es a su vez composición de dos funciones, $(g \circ f)(x) = f[g(x)]$, su derivada es de la siguiente forma y se denomina "regla de la cadena":

$$\underline{(g \circ f)'(x) = f'[g(x)] = g'[f(x)] \cdot f'(x)}.$$

b)

$$f(x) = L(cos^2 x) = L[g(x)] \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2 \cdot \cos x \cdot (-sen\ x)}{cos^2 x} = -\frac{2\ sen\ x}{\cos x}.$$

$$\underline{f(x) = L(cos^2 x) \Rightarrow f'(x) = -2\ tg\ x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}}.$$

c)

$$f'(x) = -2\ tg\ x = -2g(x) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2} \cdot f'(x)$$

$$G(x) = \int g(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \int f'(x) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot L(cos^2 x) + C.$$

$$G(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \cdot L(cos^2 0) + C = 1;\ -\frac{1}{2} L1 + C = 1;\ -0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

$$\underline{G(x) = -\frac{1}{2} \cdot L(cos^2 x) + 1}.$$

****