PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2019

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

La prueba consta de dos opciones A y B, de las cuales el alumno deberá elegir una. Cada opción consta de 5 ejercicios. En el caso de realizar ejercicios de opciones diferentes, se considerará como elegida la correspondiente al primer ejercicio presentado por el alumno. Cuando la solución de una cuestión se base en un cálculo, éste deberá incluirse en la respuesta dada.

OPCIÓN A

1º) Discute en función del parámetro $a \in R$, el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+az=1 \\ ax+y-z=2 \\ 5x+3y+z=2a \end{array}\right\}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ a & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ a & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=3+3a^2-10-5a+9-2a=3a^2-7a+2=0;$$

$$a=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2\cdot 3}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm 5}{6} \Rightarrow a_1=\frac{1}{3}, a_2=2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1/3 \\ a \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=\frac{1}{3} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$, que a efectos de rango es equivalente a

la matriz $M'' = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 6 \\ 15 & 9 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 15 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 54 + 27 + 540 - 135 - 486 - 12 = -12 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 6 + 20 - 5 - 18 - 16 = -1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a = 1/3 \\ a = 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

****

2º) Sean los puntos $A(0,0,2), B(2,0,1), C(0,2,1)$ y $D(-2,2,-1)$.

$a)$ Halle la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.

$b)$ Demuestre que los cuatro puntos no son coplanarios.

$c)$ Calcule el área del triángulo formado por los puntos B, C y D.

$a)$

Los puntos A, B y C determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,0,1) - (0,0,2)] = (2,0,-1).$

$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(0,2,1) - (0,0,2)] = (0,2,-1).$

La expresión general del plano es: $\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0;$

$4(z-2) + 2x + 2y = 0;\ \ 2(z-2) + x + y = 0;\ \ 2z - 4 + x + y = 0.$

$$\underline{\pi \equiv x + y + 2z - 4 = 0}.$$

$b)$

Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios es equivalente a demostrar que el punto D no pertenece al plano π:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + y + 2z - 4 = 0 \\ D(-2,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow -2 + 2 + 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 \neq 0 \Rightarrow D \notin \pi.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ los\ puntos\ A, B, C\ y\ D\ no\ son\ complanarios}.$$

$c)$

Los puntos B, C y D determinan los vectores:

$\overrightarrow{BC} = [C - B] = [(0,2,1) - (2,0,1)] = (-2,2,0).$

$\overrightarrow{BD} = [D - B] = [(-2,2,-1) - (2,0,1)] = (-4,2,-2).$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |-4i - 4k + 8k - 4j| =$$

$$= 2 \cdot |-i - k + 2k - j| = 2 \cdot |-i - j + k| = 2 \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{1 + 1 + 1} = \underline{2\sqrt{3}\, u^2 = S_{BCD}}.$$

****

3º) Demuestre que la ecuación $sen\,(x^2) = x - 1$ tiene una solución positiva. Razone la respuesta, exponiendo (o resultado) que justifique la solución.

Demostrar que la ecuación $sen\,(x^2) = x - 1$ tiene una solución positiva es lo mismo que demostrar que la función $f(x) = sen\,(x^2) - x + 1$ tiene una raíz positiva.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función $f(x) = sen\,(x^2) - x + 1$ es continua en su dominio, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo cerrado que se considere, por ejemplo, al intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$:

$$f(0) = sen\,0 - 0 + 1 = 0 + 1 = 1 > 0.$$

$$f\left(\sqrt{\pi}\right) = sen\,\pi - \sqrt{\pi} + 1 = -1 - \sqrt{\pi} + 1 < 0.$$

$\underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ ecuación\ sen\,(x^2) = x - 1\ tiene\ una\ raíz\ positiva.}$

****

4º) Sean las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de la región anterior.

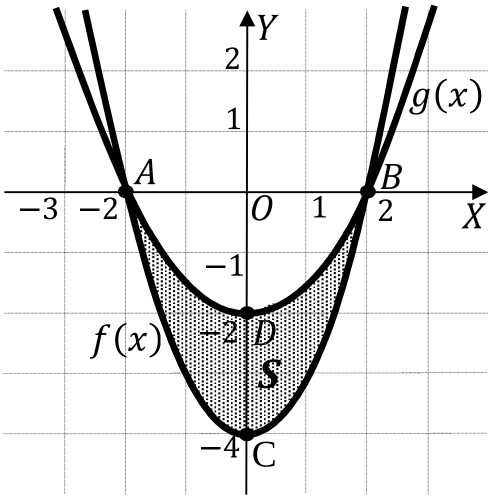
----

a)

Los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 4 = \frac{1}{2}x^2 - 2;\ 2x^2 - 8 = 0\ ;\ x^2 - 4 = 0;\ \ x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to A(-2,0) \\ x_2 = 2 \to B(2,0) \end{cases}.$$



El vértice de la parábola convexa (∪) es:

$f(x) = x^2 - 4$ es $C(0, -4)$.

El vértice de la parábola convexa (∪) es:

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ es $D(0, -2)$.

La representación gráfica, aproximada, es la que aparece en la figura adjunta.

b)

Se tiene en cuenta que ambas parábolas son simétricas con respecto al eje Y.

Por ser las ordenadas de la parábola $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ iguales o mayores (menos negativas) que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x) = x^2 - 4$ en el intervalo del área a calcular y de la observación de la figura se deduce que:

$$S = 2 \cdot \int_0^2 [g(x) - f(x)]dx = 2 \cdot \int_0^2 \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) - (x^2 - 4)\right] \cdot dx =$$

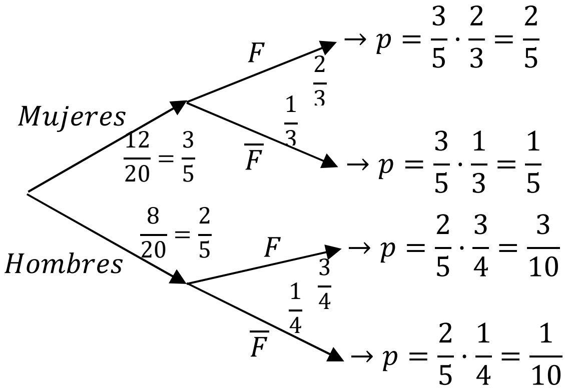
$$= 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2 - x^2 + 4\right) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{6} + 2x\right]_0^2 =$$

$$= 2 \cdot \left[\left(-\frac{2^3}{6} + 2 \cdot 2\right) - 0\right] = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3} + 4\right) = -\frac{8}{3} + 8 = \underline{\frac{16}{3}\ u^2 = S}.$$

****

5º) En una clase hay 12 chicas y 8 chicos. 8 de las 12 chicas y 6 de los 8 chicos utilizan Facebook. Se escoge un estudiante al azar, determina las siguientes probabilidades:

$a)$ Sea chica y utilice Facebook. $b)$ Sea chico, sabiendo que utiliza Facebook.



$a)$

$$P=P(M\cap F)=P(M)\cdot P(F/M)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\underline{\frac{2}{5}=0{,}4}.$$

$b)$

$$P=P(H/F)=\frac{P(H\cap F)}{P(F)}=\frac{P(H)\cdot P(F/H)}{P(M)\cdot P(F/M)+P(H)\cdot P(F/H)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}+\frac{3}{10}}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{4}{10}+\frac{3}{10}}=$$

$$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}}=\underline{\frac{3}{7}=0{,}4286}.$$

****

OPCIÓN B

1º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & -\lambda & -1\end{pmatrix}$.

a) Halle los valores $\lambda \in R$ para los que la matriz A tenga inversa.

b) Halle, si existe, la inversa de la matriz para $\lambda = 1$.

----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ \lambda & 1 & \lambda\\ 0 & -\lambda & -1\end{vmatrix}=-3-\lambda^2+3\lambda^2-\lambda=2\lambda^2-\lambda-3=0;$$

$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{1\pm 5}{4} \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=\frac{3}{2}$.

$$\underline{La\ matriz\ A\ en\ invertible\ \forall\lambda \in R-\left\{-1,\frac{3}{2}\right\}}.$$

b)

Para $\lambda = 1$ es $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $|A|=2\cdot 1^2-1-3=-2$.

$$A^t=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & -3 & -2\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow\ A^{-1}=\frac{Adj.de\ A^t}{|A|}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & -2\\ 1 & -3 & -2\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}}.$$

Para $\lambda = 1$ es $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Se obtiene la inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}3&-1&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\leftrightarrow F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\3&-1&1&1&0&0\\0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{F_2\to F_2-3F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&-4&-2&1&-3&0\\0&-1&-1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\leftrightarrow F_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&-1&-1&0&0&1\\0&-4&-2&1&-3&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to -F_2\\F_3\to -F_3\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&-1\\0&4&2&-1&3&0\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1-F_2\\F_3\to F_3-4F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&-1\\0&0&-2&-1&3&4\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3\to -\tfrac{1}{2}F_3\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&1&0&0&-1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-2\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_3\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-2\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&1\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-2\end{pmatrix}=.}$$

****

2º) Dados los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(3, -2, -2)$. Calcule la ecuación del plano π perpendicular al segmento $\overline{AB}$ que pasa por su punto medio.

Los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(3, -2, -2)$ determinan el vector $\overrightarrow{AB} = (2, -2, -4)$.

El haz de planos α perpendiculares al vector $\overrightarrow{AB}$ es $\alpha \equiv x - y - 2z + D = 0$.

El punto medio del segmento $A(1, 0, 2)$ y $B(3, -2, -2)$ es $M(2, -1, 0)$.

El plano $\pi \in \alpha$ es el que satisface la ecuación de $M(2, -1, 0)$:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x - y - 2z + D = 0 \\ M(2, -1, 0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - (-1) - 2 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -3.$$

$$\underline{\pi \equiv x - y - 2z - 3 = 0.}$$

****

3º) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de la función $f(x) = x^2 e^x$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x \cdot e^x \cdot (2 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x \cdot e^x \cdot (2 + x) = 0; \;\; x_1 = -2, x_2 = 0.$$

Las raíces de la derivada dividen a la recta real en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$ es: $f'(1) = 1 \cdot e^1 \cdot 3 =$

$= 3e > 0 \Rightarrow Creciente.$

Teniendo en cuenta lo anterior y que el dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)}.$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-2, 0)}.$$

****

4º) Resuelve la integral $I = \int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} \cdot dx$.

$$x^2 + 2x - 3 = 0; \;\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = -3, x_2 = 1.$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1).$$

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3} = \frac{M}{x+3} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 3N}{(x+3)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+3N)}{x^2+3x-3} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} M + N = 5 \\ -M + 3N = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4N = 8; \; N = 2 \Rightarrow M + 2 = 5 \Rightarrow M = 3.$

$$A = \int \frac{5x+3}{x^2+2x-3} \cdot dx = \int \left(\frac{M}{x+3} + \frac{N}{x-2} \right) \cdot dx = \int \left(\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x-1} \right) \cdot dx =$$

$= 3 \cdot L|x+3| + 2 \cdot L|x-1| + C.$

$$\underline{\int \frac{5}{x^2+2x-3} \cdot dx = 3L|x+3| + 2L|x-1| + C.}$$

****

5º) Supongamos que en una población de Extremadura tienen una estatura que se distribuye según una normal de media 170 cm y desviación típica 10 cm.

a) ¿Qué porcentaje de habitantes miden entre 170 y 185 cm?

b) ¿A partir de qué altura están el 33 % de los habitantes más altos?

----

a)

$Datos$: $\mu = 170;\ \ \sigma = 10.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(170;\ 10).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-170}{10}$.

$P = P(170 \leq Z \leq 185) = P\left(\frac{170-170}{10} \leq Z \leq \frac{185-170}{10}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{15}{10}\right) =$

$= P(0 \leq Z \leq 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - P(Z < 0) = 0{,}9332 - 0{,}5 = \underline{0{,}4332}.$

b)

El 33 % de los habitantes más altos es equivalente al 67 % de los habitantes más altos.

$P = P\left(Z \geq \frac{X-170}{10}\right) = 0{,}67.$

Mirando en la tabla $N(0{,}1)$ al valor 0,67 le corresponde 0,44:

$\frac{X-170}{10} > 0{,}44;\ \ X - 170 > 4{,}4 \Rightarrow X > 174{,}4.$

$\underline{El\ 33\ \%\ de\ los\ habitantes\ más\ altos\ miden\ más\ de\ 174{,}4\ cm}.$

****