PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JULIO – 2020

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas.
Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas.

PREGUNTAS

1º) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Estudie los valores de $k \in R$ para los que la matriz tiene inversa.

b) Calcule la inversa para $k = 1$.

----

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & k \\ 2 & -k & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = k - 2k - 1 + k^2 + 1 - 2 = k^2 - k - 2 = 0;$$

$k = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow k_1 = -1, k_2 = 2.$

$$\underline{La\ matriz\ M\ es\ inverible\ \forall k \in R - \{-1, 2\}}.$$

b)

Para $k = 1$ la matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. $|M| = -2$.

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ M^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \frac{Adj.\ de\ M^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Discuta en función del parámetro $k \in R$ el sistema $\left.\begin{array}{r} x+\lambda y-z=1 \\ -\lambda x+y=\lambda \\ (\lambda+3)y-2z=4 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda+3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \end{vmatrix}=-2+\lambda(\lambda+3)-2\lambda^2=-2+\lambda^2+3\lambda-2\lambda^2=$$

$$=-\lambda^2+3\lambda-2=0;\ \ \lambda^2-3\lambda+2=0;\ \ \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l}\lambda\neq1\\ \lambda\neq2\end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow\{C_1,C_2,C_3\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-2+4-2=0\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ \lambda=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\{2F_1+F_2=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \left\{\begin{array}{l}\lambda=1\\ \lambda=2\end{array}\right\}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

****

3º) Sean el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$.

a) Estudie la posición relativa de la recta con respecto al plano.

b) Calcule la distancia de la recta al plano.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -x = y - 2 \\ x = z - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -1 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ x + y = 2 \\ x - z = -1 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M \ y \ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 + 1 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ paralelos.}$$

b)

La distancia entre $r \ y \ \pi$ cuando son paralelos es la misma que la distancia de un punto de la recta r al plano π. Un punto de r es $A(0, 2, 1)$.

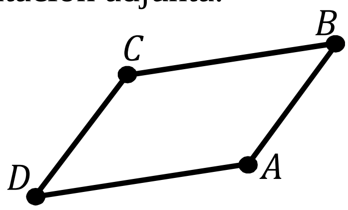
La distancia de un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $A(0,2,1)$ y al plano $\pi \equiv 2x + y - z - 2 = 0$:

$$d(r,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|2\cdot 0 + 1\cdot 2 - 1\cdot 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2-1-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{6}\ unidades}.$$

****

4º) Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 3, -2)$, $B(4, 3, 1)$ y $C(1, 0, 1)$ como podemos observar en la representación adjunta.



a) Calcule el cuarto vértice D.

b) Calcule el área del paralelogramo.

----

a)

Sea el punto $D(x, y, z)$. Los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{DC}$ son iguales.

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(4, 3, 1) - (1, 3, -2)] = (3, 0, 3).$$

$$\overrightarrow{DC} = [C - D] = [(1, 0, 1) - (x, y, z)] = (1 - x, -y, 1 - z).$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (3, 0, 3) = (1 - x, -y, 1 - z) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 1 - x = 3 \to x = -2 \\ -y = 0 \to y = 0 \\ 1 - z = 3 \to z = -2 \end{matrix}\right\}.$$

$$\underline{D \equiv (-2, 0, -2)}.$$

b)

El área de un paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \left|\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DC}\right| = |[A - D] \times [C - D]| =$$

$$= |[(1, 3, -2) - (-2, 0, -2)] \times [(1, 0, 1) - (-2, 0, -2)]| = |(3, 3, 0) \times (3, 0, 3)| =$$

$$= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \right\| = |9i - 9k - 9j| = 9 \cdot |i - j - k| = 9 \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} =$$

$$= 9 \cdot \sqrt{1 + 1 + 1} \Rightarrow \underline{S = 9\sqrt{3}\, u^2}.$$

****

5º) a) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x) = e^x(x^2 - x + 1)$.

b) Justifique si existe algún valor de x tal que $f(x) = 2$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = e^x(x^2 - x + 1) + e^x(2x - 1) = e^x(x^2 + x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x(x^2 + x) = 0;\ x^2 + x = 0;\ x(x + 1) = 9 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 0.$$

Por ser $f(x)$ continua en su dominio, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 0)\ y\ (0, +\infty)$, en los cuales la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, +\infty)$ es $f'(1) = 2e > 0$.

De lo expuesto anteriormente se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -1) \cup (0, +\infty).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-1, 0).}$$

b)

$$f(x) = 2 \Rightarrow e^x(x^2 - x + 1) = 2.$$

Se considera la función $g(x) = f(x) - 2 = e^x(x^2 - x + 1) - 2$, que es continua en R, por ser la suma de una constante y el producto de una función exponencial por una función polinómica.

Demostrar que existe un valor real de x para el cual $f(x) = 2$ es equivalente a demostrar que $g(x) = 0$.

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$".

Aplicando el teorema de Bolzano a $g(x)$, por ejemplo, en el intervalo $(0, 1)$:

$$g(0) = e^0(0^2 - 0 + 1) - 2 = 1 \cdot 1 - 2 = -1 < 0.$$

$$g(1) = e^1(1^2 - 1 + 1) - 2 = e \cdot 1 - 2 = e - 2 > 0.$$

Lo anterior demuestra que se anula la función $g(x)$ en algún punto del intervalo $(0,1)$, lo cual es equivalente a decir que:

$$\underline{\textit{La función } f(x) \textit{ toma el valor } 2 \textit{ en un punto el intervalo } (0,1).}$$

****

6º) Considere la función $f(x)$, donde $a \in R$, dada por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^x}{x} & si \;\; x \neq 0 \\ a & si \;\; x = 0 \end{cases}$.

$a)$ Calcule el valor de a para que la función sea continua.

$b)$ Calcule la ecuación de la recta tangente en $x = 1$.

$a)$

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\; x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1-e^x}{x} = \frac{1-e^0}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-e^x}{1} = -\,e^0 = -1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = a \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

$b)$

$$f(1) = \frac{1-e^1}{1} = 1 - e \Rightarrow \text{Punto de tangencia} \Rightarrow P(1, 1-e).$$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-e^x \cdot x - (1-e^x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-e^x \cdot x - 1 + e^x}{x^2} = \frac{e^x(1-x)-1}{x^2} & si \;\; x \neq 0 \\ 0 \quad si \;\; x = 0 \end{cases}.$$

$$m = f'(1) = \frac{e^1(1-1)-1}{1^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

La expresión de una recta conocidos un punto y la pendiente viene dada por la expresión $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 1-e)$ y $m = -1$:

$$y - (1-e) = -1 \cdot (x-1); \;\; y - 1 + e = -x + 1.$$

$$\underline{Recta\; tangente: t \equiv x + y + (e-2) = 0}.$$

****

7º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y $g(x) = -x + 1$, se pide:

a) Represente de forma aproximada la región delimitada por las dos curvas.

b) Calcule el área de dicha región.

La función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ es una parábola convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2. Su vértice es el siguiente:

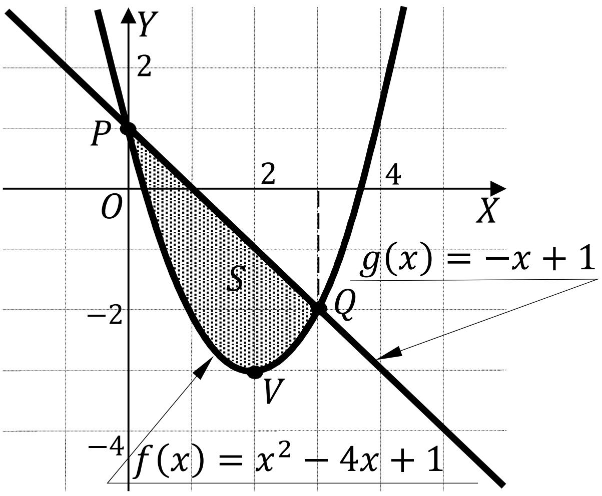
$$f'(x) = 2x - 4. \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0; \ \ x = 2.$$

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = 4 - 8 + 1 = -3 \Rightarrow V(2, -3).$$

Los puntos de corte de la parábola y la recta se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 4x + 1 = -x + 1; \ x^2 - 3x = 0; \ x(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow P(0, 1) \\ x_2 = 3 \rightarrow Q(3, -2) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.



Por ser todas las ordenadas de la recta mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola en el intervalo $(0, 3)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 [(-x + 1) - (x^2 - 4x + 1)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} \right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18+27}{2} =$$

$$= \underline{\frac{9}{2} \ u^2 = 4{,}5 \ u^2} \ .$$

****

8º) Resuelva la integral: $I = \int \frac{-x+7}{x^2+x-2} \cdot dx$.

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}\ \Rightarrow\ x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1).$$

$$\frac{-x+7}{x^2+x-2} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 2N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+2N)}{x^2+x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M + N = -1 \\ -M + 2N = 7 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3N = 6;\ N = 2 \Rightarrow M + 2 = -1 \Rightarrow M = -3.$

$$A = \int \frac{-x+7}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1}\right) \cdot dx = \int \left(\frac{-3}{x+3} + \frac{2}{x-1}\right) \cdot dx =$$

$= -3 \cdot L|x+2| + 2 \cdot L|x-1| + C.$

$$\underline{\int \frac{5}{x^2+2x-3} \cdot dx = 2L|x-1| - 3L|x+2| + C.}$$

****

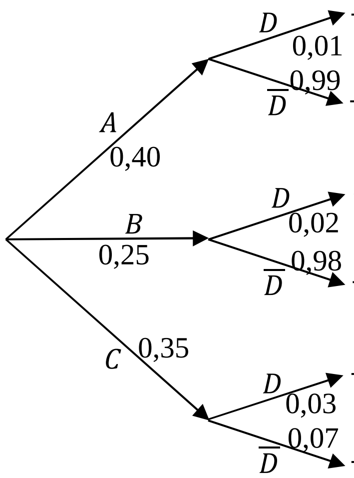
9º) Una librería compra lotes de material escolar a tres empresas A, B y C. A la empresa A le compra el 40 % de los lotes, a B el 25 % y a C el resto. De la empresa A le viene defectuoso el 1 % de los lotes, de B el 2 % y de C el 3 %. Elegido un lote al azar, se pide:

a) Calcule la probabilidad de que sea defectuoso.

b) Si sabemos que no es defectuoso, calcule la probabilidad de que lo haya fabricado la empresa B.

----

a)



$\rightarrow P = 0{,}40 \cdot 0{,}01 = 0{,}0040$

$\rightarrow P = 0{,}40 \cdot 0{,}99 = 0{,}3960$

$\rightarrow P = 0{,}25 \cdot 0{,}02 = 0{,}0050$

$\rightarrow P = 0{,}25 \cdot 0{,}98 = 0{,}2450$

$\rightarrow P = 0{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}0105$

$\rightarrow P = 0{,}35 \cdot 0{,}97 = 0{,}3395$

$$P = P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0{,}40 \cdot 0{,}01 + 0{,}25 \cdot 0{,}02 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 = 0{,}0040 + 0{,}0050 + 0{,}0105 = \underline{0{,}0195}.$$

b)

$$P = \left(B/\overline{D}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{P(C) \cdot P\left(\overline{E}/C\right)}{1 - P(D)} = \frac{P(B) \cdot P\left(\overline{D}/B\right)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}98}{1 - 0{,}0195} = \frac{0{,}2450}{0{,}9805} = \underline{0{,}2499}.$$

****

10º) Se ha hecho un estudio de un famoso jugador de baloncesto de la ACB y se sabe que tiene una probabilidad de encestar un triple del 60 %. Si realiza 8 tiros a canasta:

a) Calcule la probabilidad de que enceste 5 triples.

b) Calcule la probabilidad de que enceste al menos 2.

c) Determine la media y la desviación típica de la distribución.

----

a)

Se trata de una distribución binomial con $p = 0{,}6 \; y \; q = 0{,}4$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad de la distribución binomial, que es la siguiente: $P = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$$P = \binom{8}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! \cdot 5!} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^3 =$$

$$= 56 \cdot 0{,}07776 \cdot 0{,}064 = \underline{0{,}2787}.$$

b)

El suceso contrario a "encestar al menos 2" es "la unidad menos la probabilidad de no encestar ninguna vez más la probabilidad de encestar una vez", por lo cual, la probabilidad pedida es la siguiente:

$$P = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^8 + \binom{8}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^7\right] =$$

$$= 1 - (1 \cdot 1 \cdot 0{,}4^8 + 8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^7) = 1 - (0{,}000262 + 4{,}8 \cdot 0{,}001638) =$$

$$= 1 - (0{,}000262 + 0{,}007864) = 1 - 0{,}008126 = \underline{0{,}9918}.$$

c)

La media y la desviación típica en una distribución binomial vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\mu = n \cdot p = 8 \cdot 0{,}6 \Rightarrow \underline{\mu = 4{,}8}.$$

$$\rho = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{8 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4} = \sqrt{1{,}92} \Rightarrow \underline{\rho = 1{,}3856}.$$

****