PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

SEPTIEMBRE – 2020

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas, cuyo valor es de 2 puntos cada uno. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas.
Observación importante: En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas.

PREGUNTAS

1º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

a) Calcule los productos de matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$. ¿Se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$?

b) Compruebe si se cumple la igualdad $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

----

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{Como\ se\ observa, no\ se\ cumple\ que\ A \cdot B = B \cdot A.}$$

b)

$$(A+B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Como\ se\ observa, no\ se\ cumple\ que\ (A+B)^2 = A^2 + B^2}.$$

****

2º) $a)$ Estudie el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+\lambda z=1 \\ x+y+\lambda z=1 \\ \lambda x-y+z=1 \end{array}\right\}$, en función del parámetro $\lambda \in R$.

$b)$ Resuelve el sistema (si es posible) para $\lambda = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-\lambda-\lambda^2+\lambda=0;\ \ -\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1-1+1+1=2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \lambda=-1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ \lambda=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3=C_4\} \Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ \lambda=1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado.

Despreciando la tercera ecuación y haciendo $z=\lambda$:

$$\underline{Solución: x=1-\lambda;\ \ y=0;\ \ z=\lambda, \forall \lambda \in R.}$$

****

3º) Sean los vectores $\vec{u} = (4, 3, a), \vec{v} = (a, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2a, 1, a)$, con $a \in R$.

a) Determine los valores de a para que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

b) Para el valor $a = 1$ exprese $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

----

a)

Para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes es necesario que el determinante que forman tenga rango tres, es decir, que sea distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & a \\ a & 1 & 0 \\ 2a & 1 & a \end{vmatrix} = 4a + a^2 - 2a^2 - 3a^2 = 0;\ 4a - 4a^2 = 0;\ \ 4a(1-a) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1.$

$\underline{\textit{Los vectores } \vec{u}, \vec{v} \textit{ y } \vec{w} \textit{ son linealmente independientes } \forall a \in R - \{0, 1\}}.$

b)

Para $a = 1$ los vectores son $\vec{u} = (4, 3, 1), \vec{v} = (1, 1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 1, 1)$.

$$\vec{w} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4\alpha + \beta = 2 \\ 3\alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow \underline{\vec{w} = \vec{u} - 2\vec{v}}.$$

****

4º) Dados el plano π_1 determinado por los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,0,2)$ y $C(1,2,6)$ y el plano $\pi_2 \equiv x - y + z = 3$. Calcule una recta paralela a los dos planos y que no esté contenida en ninguno de ellos.

Los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,0,2)$ y $C(1,2,6)$ determinan los vectores:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2,0,2) - (0,1,1)] = (2,-1,1).$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(2,0,2) - (1,2,6)] = (1,-2,-4).$

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$4x + (y-1) - 4(z-1) + (z-1) + 2x + 8(y-1) = 0;$

$6x + 9(y-1) - 3(z-1) = 0;\ \ 2x + 3(y-1) - (z-1) = 0;$

$2x + 3y - 3 - z + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \underline{\pi_1 \equiv 2x + 3y - z - 2 = 0}.$

Los planos $\pi_1\ y\ \pi_2$ determinan la recta $r' \equiv \begin{cases} 2x + 3y - z - 2 = 0 \\ x - y + z - 3 = 0 \end{cases}.$

Un vector director de r' es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (2,3,-1)\ y\ \overrightarrow{n_2} = (1,-1,1)$.

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3i - j - 2k - 3k - i - 2j = 2i - 3j - 5k \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{v_{r'}} = (2,-3,-5).$

Las infinitas rectas que son solución del ejercicio tienen como vector director al vector hallado $\overrightarrow{v_{r'}} = (2,-3,-5)$; considerando un punto que no pertenezca a ninguno de los dos planos dados, por ejemplo el origen, una recta solución es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = -5\lambda \end{cases}.}$$

****

5º) Sea la función $f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$.

a) Estudie las asíntotas, la monotonía (crecimiento y decrecimiento) y los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función $f(x)$.

b) Con los datos obtenidos en el apartado anterior, representa de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$.

----

a)

Por ser $1 + x^2 \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$; son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{1+x^2} = 0.$$

$$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ (y = 0)\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito; son los valores que anulan el denominador.

$$1 + x^2 = 0 \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ verticales.}$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0, m \neq \infty$, siendo:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{4x}{1+x^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x+x^3} = 0.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ oblicuas.}$$

También se sabe que no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

Una función es simétrica con respecto al eje Y cuando $f(-x) = f(x)$ y es simétrica con respecto al origen cuando $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{-4x}{1+(-x)^2} = -\frac{4x}{1+x^2} = -f(x).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ simétrica\ con\ respecto\ al\ origen.}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{4\cdot(1+x^2)-4x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{4+4x^2-8x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0;\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Como quiera que $(1 + x^2)^2 > 0, \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea la expresión $1 - x^2$.

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-1,1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{-8x\cdot(1+x^2)^2-4(1-x^2)\cdot[2\cdot(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{-8x\cdot(1+x^2)-16x\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{-8x-8x^3-16x+16x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{8x^3-24x}{(1+x^2)^3} = \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(-1) = \frac{-8+24}{2^3} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{-4}{1+1} = -\frac{4}{2} = -2 \Rightarrow \underline{Mínimo: P(-1,-2)}.$$

$$f''(1) = \frac{8-24}{2^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \underline{Máximo: Q(1,2)}.$$

También se obtiene el máximo teniendo en cuenta la simetría con respecto al origen de la función.

Aunque no se piden, se obtienen a continuación los puntos de inflexión de la función.

Para que una función tenga un punto de inflexión es condición necesaria que se anule su segunda derivada:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{8x(x^2-3)}{(1+x^2)^3} = 0;\ \ 8x(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}.$$

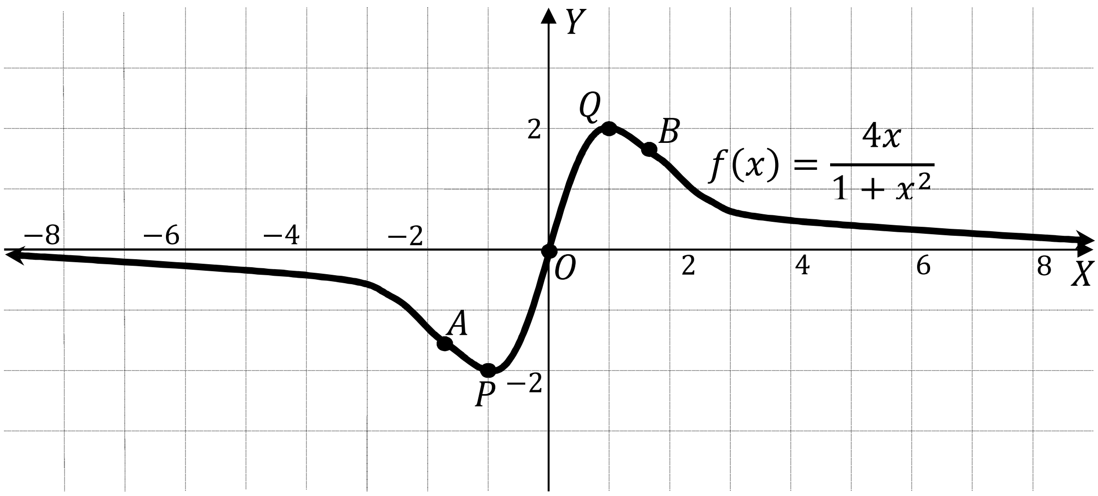
$$f(-\sqrt{3}) = \frac{-4\sqrt{3}}{1+(-\sqrt{3})^2} = \frac{-4\sqrt{3}}{1+3} = -\sqrt{3} \Rightarrow\ Punto\ de\ inflexión: A(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}).$$

$$f(0) = \frac{4\cdot 0}{1+0} = 0 \Rightarrow\ Punto\ de\ inflexión: O(0, 0).$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{1+3} = \sqrt{3} \Rightarrow\ Punto\ de\ inflexión: B(\sqrt{3}, \sqrt{3}).$$

$b)$

Con los datos obtenidos y teniendo en cuenta que la función pasa por el origen de coordenadas, puede hacerse un esbozo de la gráfica de $f(x)$, que es el siguiente:



****

6º) Calcula los valores de a y b sabiendo que la siguiente función $f(x)$ es derivable en todo su dominio: $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si\ x\leq 1 \\ -2+Lx & si\ \ x>1 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de a y b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+ax+b)=2+a+b=f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(-2+Lx)=-2+L1=-2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow 2+a+b=-2\Rightarrow a+b=-4. \quad (1)$$

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x=1$ cuya derivabilidad se va a forzar determinando los correspondientes valores de a y b.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 4x+a & si\ x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & si\ \ x>1 \end{cases}\Rightarrow f'(1)=\begin{cases} 4+a & si\ \ x\leq 1 \\ 1 & si\ \ x>1 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f'(1^-)=f'(1^+)\Rightarrow 4+a=1\Rightarrow a=-3.$$

Sustituyendo el valor de a en (1): $-3+b=-4\Rightarrow b=-1$.

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ en\ x=1\ para\ a=-3\ y\ b=-1.}$$

****

7º) Sean las funciones $f(x) = 1 - x^2$ y $g(x) = -3$:

a) Represente la región plana encerrada por las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

b) Calcule el área de la región anterior.

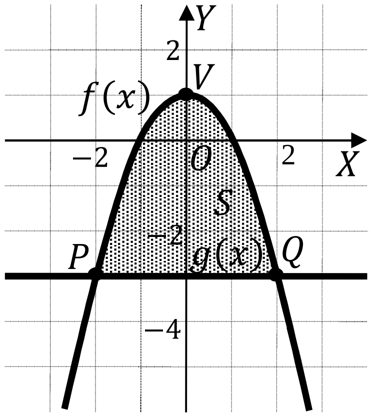
----

a)

La función $f(x) = 1 - x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2 y su vértice es siguiente:

$$f'(x) = -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow Vértice: V(0, 1).$$

Los puntos de corte de ambas funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.



$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1 - x^2 = -3; \;\; x^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \Rightarrow P(-2, -3) \\ x_2 = 2 \Rightarrow Q(2, -3) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta.

b)

Teniendo en cuenta que ambas funciones son simétricas con respecto al eje de ordenadas y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2\int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx = 2\int_0^2 (1 - x^2 + 3) \cdot dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 4) \cdot dx =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - 0\right] = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{-16+48}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -9 + 9 + 9 - \frac{1}{3} - 1 + 3 = 11 - \frac{1}{3} = \frac{33-1}{3} = \underline{\frac{32}{3}\, u^2 \cong 10{,}67\, u^2 = S}.$$

****

8º) Calcule la integral: $I = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx$.

$J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx.$

$x^2 - x - 2 = 0; \;\; x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$

$x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2).$

$\frac{3x}{x^2-x-2} = \frac{M}{x+1} + \frac{N}{x-2} = \frac{Mx-2M+Nx+N}{(x+1)(x-2)} = \frac{(M+N)x+(-2M+N)}{x^2-x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=3 \\ -2M+N=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r} 2M+2N=6 \\ -2M+N=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3N = 6; \;\; N = 2; \;\; M + 2 = 3 \Rightarrow M = 1.$

$J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}\right) \cdot dx = L|x+1| + 2 \cdot L|x-2| + C.$

$\underline{J = \int \frac{3x}{x^2-x-2} \cdot dx = L[|x+1| \cdot (x-2)^2] + C.}$

****

9º) Se realizaron dos debates electorales, uno el lunes y otro el martes. Se hizo una encuesta a 1.500 personas para estimar la audiencia, de las cuales: 1.100 personas vieron el debate del lunes, 1.000 vieron el debate del martes y 300 no vieron ninguno. Eligiendo al azar a uno de los encuestados:

a) Calcule la probabilidad de que viera los dos debates.

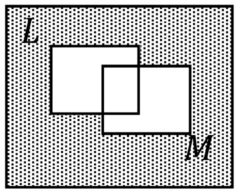
b) Si vio el debate el lunes, calcule la probabilidad de que viera el del martes.

$$Datos: P(L) = \frac{1.100}{1.500} = \frac{11}{15};\ \ P(M) = \frac{1.000}{1.500} = \frac{2}{3};\ \ P\left(\overline{L} \cap \overline{M}\right) = \frac{300}{1.500} = \frac{1}{5}.$$

a)

$$P\left(\overline{L} \cap \overline{M}\right) = 1 - P(L \cup M) \Rightarrow P(L \cup M) = 1 - P\left(\overline{L} \cap \overline{M}\right).$$

$$P(L \cup M) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$



$P\left(\overline{L} \cap \overline{M}\right) = 1 - P(L \cup M)$

$$P(L \cap M) = P(L) + P(M) - P(L \cup M) =$$

$$= \frac{11}{15} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{11+10-12}{15} = \frac{9}{15} = \underline{\frac{3}{5} = 0{,}6.}$$

b)

$$P = P(M/L) = \frac{P(L \cap M)}{P(L)} = \frac{\frac{9}{15}}{\frac{11}{15}} = \underline{\frac{9}{11} = 0{,}8182.}$$

****

10º) El radio de un pistón se distribuye según una distribución normal de media 5 cm y desviación típica de 0,01 cm.

a) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio mayor que 5,01 cm.

b) Calcule la probabilidad de que un pistón tenga un radio entre 4,98 y 5 cm.

----

a)

$Datos$: $\mu = 5$; $\sigma = 0{,}01$.

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(5;\ 0{,}01)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-5}{0{,}01}$.

$$P = P(X > 5{,}01) = P\left(Z > \frac{5{,}01-5}{0{,}01}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}01}{0{,}01}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

b)

$$P = P(4{,}98 < X < 5) = P\left(\frac{4{,}98-5}{0{,}01} < Z < \frac{5-5}{0{,}01}\right) = P\left(\frac{-0{,}02}{0{,}01} < Z < \frac{0}{0{,}01}\right) =$$

$$= P(-2 < Z < 0) = P(Z < 0) - [1 - P(Z \leq 2)] =$$

$$= P(Z < 0) - 1 + P(Z \leq 2) = 0{,}5 - 1 + 0{,}9772 = 1{,}4772 - 1 = \underline{0{,}4772}.$$

****