PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

JUNIO – 2021

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN.

El examen consta de 10 problemas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

PREGUNTAS

1º) Demostrar que la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica la ecuación $M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O$ y determinar los escalares $\lambda_1\ y\ \lambda_2$ de R (donde $I\ y\ O$ son las matrices 2×2 identidad y cero).

$$M^2 + \lambda_1 M + \lambda_2 I = O \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 I = O;$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2\lambda_1 + \lambda_2 = -5 \\ \underline{\lambda_1 = -4} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 3}.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-8+3 & 4-4 \\ 4-4 & 4-8+3 \end{pmatrix} = O.$$

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ M\ verifica\ la\ ecuación\ dada\ para\ \lambda_1 = -4\ y\ \lambda_2 = 3.}$$

****

2º) Discutir y resolver (cuando sea posible) el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $\lambda \in R$: $\left.\begin{array}{r} x - y = \lambda \\ x - \lambda y = \lambda \\ \lambda x - y = \lambda \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz ampliada en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ \lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (-\lambda - 1 - \lambda + \lambda^2 + 1 + 1) =$$

$$= \lambda \cdot (\lambda^2 - 2\lambda + 1) = \lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1.$$

$$\underline{Para \left\{\begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ \lambda \neq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ \lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = Rang\ M = 1.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

****

3º) Dados el plano $\pi \equiv kx + y - z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-4}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$.

$a)$ Determinar los valores del parámetro $\lambda \in R$ para que el plano π contenga a r.

$b)$ Para $k = 0$, calcular el ángulo que forman π y r.

$a)$

Para que la recta r esté contenida en el plano π es condición necesaria que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares.

El vector director de la recta es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, -1)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (k, 1, -1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2, 1, -1) \cdot (k, 1, -1) = 0;\ \ 2k + 1 + 1 = 0;\ \ 2k + 2 = 0;$

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1.$

El plano resulta $\pi \equiv -x + y - z = 0$. Si el plano contiene a la recta tiene que contener a todos sus puntos. Un punto de r es $P(4, 2, -2)$.

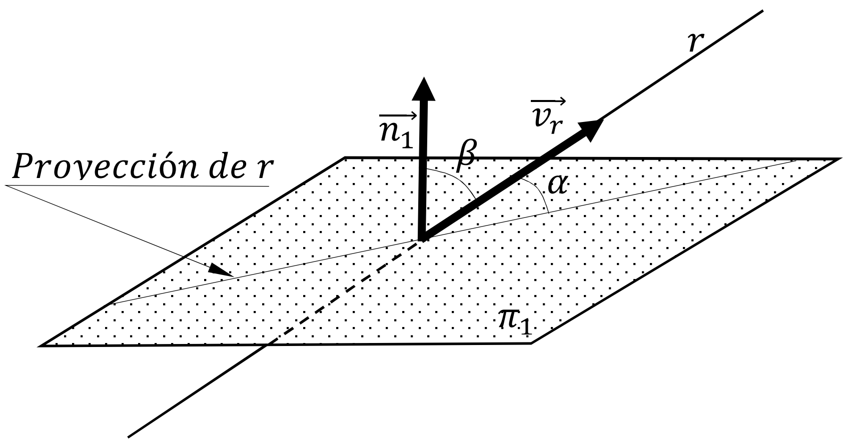
Si el plano π contiene al punto P tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv -x + y - z = 0 \\ P(4, 2, -2) \end{array}\right\} \Rightarrow -4 + 2 - (-2) = -2 + 2 = 0 \Rightarrow Se\ satisface.$$

$$\underline{El\ plano\ \pi\ contiene\ a\ la\ recta\ r\ para\ k = -1.}$$

$b)$

Para $k = 0$ el plano es $\pi_1 \equiv y - z = 0$ y su vector normal es $\overrightarrow{n_1} = (0, 1, -1)$.



Por definición de producto escalar: $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_r} = |\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{v_r}| \cdot \cos\beta$.

$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{v_r}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$. Por ser α y β complementarios: $sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{v_r}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{v_r}|}$.

$$sen\ \alpha = \frac{(0,1,-1)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{0+1+1}{\sqrt{0+1+1}\cdot\sqrt{4+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{12}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774 \Rightarrow \alpha = arc\ sen\ 0{,}5774 = 35°\ \ 15'\ 52''.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ forman\ un\ \text{á}ngulo\ de\ 35°\ \ 15'\ 52''.}$$

****

4º) Sea el plano $\pi \equiv x + y + z = 1$. Encontrar un plano β, paralelo a π, tal que el triángulo formado por los puntos de corte de β con los ejes tenga de área $2\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

El plano β tiene por expresión $\beta \equiv x + y + z + D = 0$.

Los puntos de corte con les ejes del plano β son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x + D = 0;\ \ x = -D \Rightarrow A(-D, 0, 0).$$

$$Eje\ Y \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y + D = 0;\ \ y = -D \Rightarrow B(0, -D, 0).$$

$$Eje\ Z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \beta \equiv x + y + z + D = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z + D = 0;\ \ z = -D \Rightarrow C(0, 0, -D).$$

Los puntos $A(-D, 0, 0)$, $B(0, -D, 0)$ y $C(0, 0, -D)$ determinan los siguientes vectores:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0, -D, 0) - (-D, 0, 0)] = (D, -D, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0, 0, -D) - (-D, 0, 0)] = (-D, 0, D).$$

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 2\sqrt{3};\ \ \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ D & -D & 0 \\ -D & 0 & D \end{matrix}\right\| = 4\sqrt{3};$$

$$D^2 \cdot \left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\| = 4\sqrt{3};\ \ D^2 \cdot |-i - k - j| = 4\sqrt{3};\ \ D^2 \cdot |-i - j - k| = 4\sqrt{3};$$

$$D^2\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = 4\sqrt{3};\ D^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3};\ D^2 = 4 \Rightarrow D_1 = -2, D_2 = 2.$$

Cumplen la condición pedida los siguientes planos:

$$\underline{\beta_1 \equiv x + y + z - 2 = 0\ \ y\ \ \beta_2 \equiv x + y + z + 2 = 0}.$$

****

5º) Estudiar asíntotas, monotonía (crecimiento y decrecimiento), extremos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

El dominio de $f(x) = e^{-x^2}$ es R por ser una función exponencial.

Por ser $f(-x) = f(x)$ la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X) es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ verticales}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 0)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \epsilon (0, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2} = 0 \Rightarrow e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = -2 \cdot \left[1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2}\right] = -2 \cdot e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

$$f''(0) = -2 \cdot e^0(1-0) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = f(x) = e^{-0} = 1 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: A(0, 1)}.$$

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero su tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2}(1-2x^2).$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2 \cdot e^{-x^2}(1-2x^2) = 0;\ \ e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow 1 - 2x^2 = 0;$$

$$2x^2 = 1;\ \ x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f'''(x) = -2 \cdot \left[-2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1-2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x)\right] =$$

$$= -2 \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} \cdot [(1-2x^2) + 2] = 4x \cdot e^{-x^2} \cdot (3-2x^2).$$

$$f'''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow Puntos\ de\ inflexión\ para\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ y\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}.$$

$$Puntos\ de\ inflexión: \underline{P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)\ y\ Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\right)}.$$

****

6º) Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan en al menos dos puntos. Para cada uno de los puntos de corte, encontrar un intervalo que lo contenga de longitud menor o igual que 1. Razonar las respuestas exponiendo y verificando los resultados (teoremas) que los justifiquen.

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - x^2 = e^x \Rightarrow h(x) = e^x + x^2 - 2.$$

Demostrar que las funciones $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = e^x$ se cortan al menos en dos puntos es equivalente a demostrar que la función $h(x) = e^x + x^2 - 2$ tiene al menos dos raíces reales.

La función $h(x) = e^x + x^2 - 2$ es continua y derivable en su dominio, que es R, por lo cual lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, los intervalos $[-2, 0]\ y\ [0, 1]$ y aplicando el teorema de Bolzano a cada uno de ellos, resulta:

$$[-2, 0] \Rightarrow \begin{cases} h(-2) = e^{-2} + (-2)^2 - 2 = \frac{1}{e^2} + 4 - 2 = \frac{1}{e^2} + 2 > 0 \\ h(0) = e^0 + 0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

$$[0, 1] \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 < 0 \\ h(1) = e^1 + 1^2 - 2 = e + 1 - 2 = e - 1 > 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ los\ intervalos\ [-2, 0]\ y\ [0, 1]}.$

Para obtener intervalos menores o iguales que la unidad consideramos, en primer lugar, el intervalo $[-1, 0]$ en el cual, aplicamos de nuevo el teorema de Bolzano:

$$[-1, 0] \Rightarrow \begin{cases} h(-1) = e^{-1} + (-1)^2 - 2 = \frac{1}{e} + 1 - 2 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \\ h(0) = e^0 + 0^2 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ el\ intervalo\ [-2, -1]}.$

Se considera, ahora, el intervalo $[0, 1/2]$ al cual se aplica el teorema de Bolzano:

$$[0, 1/2] \Rightarrow \begin{cases} h(0) = -2 < 0 \\ h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \sqrt{e} + \frac{1}{4} - 2 = \sqrt{e} - \frac{7}{4} \cong 1{,}65 - \frac{7}{4} < 0 \end{cases}.$$

$\underline{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ se\ cortan\ en\ el\ intervalo\ [0, 1/2]}.$

****

7º) Calcular la integral racional: $I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx$.

$$x^2 + x - 2 = 0; \;\; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \;\Rightarrow\; x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1).$$

$$\frac{3x}{x^2+x-2} = \frac{M}{x+2} + \frac{N}{x-1} = \frac{Mx - M + Nx + 2N}{(x+2)(x-1)} = \frac{(M+N)x + (-M+2N)}{x^2+x-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} M + N = 3 \\ -M + 2N = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3N = 3; \;\; N = 1; \;\; M + 1 = 3 \;\Rightarrow M = 2.$$

$$I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{x-1} \right) \cdot dx = 2 \cdot L|x+2| + L|x-1| + C =$$

$$= L\sqrt{\frac{(x+2)^2}{|x-1|}} + C \Rightarrow \underline{I = \int \frac{3x}{x^2+x-2} \cdot dx = L|(x+2)^2 \cdot (x-1)| + C}.$$

****

8º) Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

a) Representar la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0,2]$.

b) Calcular el área de la región anterior.

----

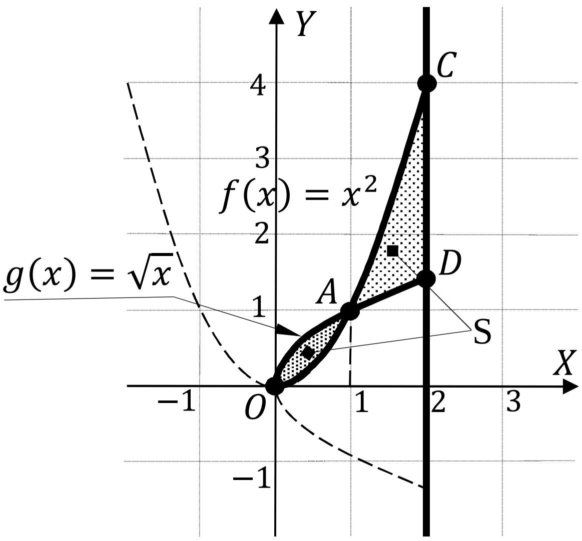
a)

Los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las soluciones reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=\sqrt{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=\sqrt{x};\ \ x^4=x^1;\ \ x^4-x^1=0;\ \ x^1(x^3-1)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^1(x^3-1)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=1$. Los puntos de corte son $O(0,0)$ y $A(1,1)$.

$f(2)=2^2=4 \Rightarrow C(2,4)$. $\qquad g(2)=+\sqrt{2} \Rightarrow D\left(2,\sqrt{2}\right)$.



La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la expresada en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\cdot dx+\int_1^2\left(x^2-\sqrt{x}\right)\cdot dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)\cdot dx+\int_1^2\left(x^2-x^{\frac{1}{2}}\right)\cdot dx=\left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_1^2=$$

$$=\left[\left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1^3}{3}\right)-0\right]+\left[\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right]=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}+\frac{8}{3}-\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$$

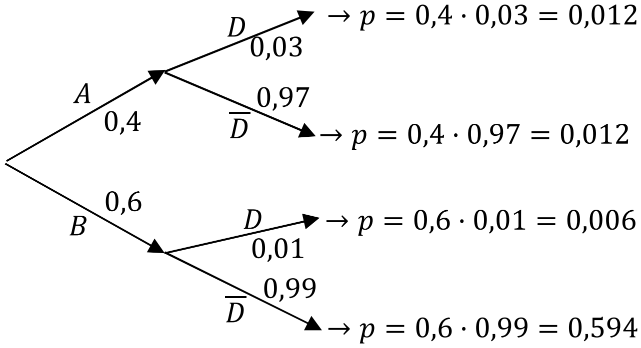
$$=\frac{10}{3}-\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \underline{S=\frac{2\cdot\left(5-2\sqrt{2}\right)}{3}\ u^2 \cong 1{,}45\ u^2}.$$

****

9º) Un mecánico compra ruedas de dos marcas A y B. Compra el 40 % de la marca A que tiene un 3 % de ruedas defectuosas. Y compra el resto a la marca B con un 1 % de defectuosas. El mecánico tiene que cambiar una rueda y elige una al azar.

$a)$ Calcular la probabilidad de que dicha rueda sea defectuosa.

$b)$ Si la rueda es defectuosa, calcular la probabilidad de que sea de la marca A.



$a)$

$$P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) =$$

$$= 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}6 \cdot 0{,}01 = 0{,}012 + 0{,}006 = \underline{0{,}018}.$$

$b)$

$$P = P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}03}{0{,}018} = \frac{0{,}012}{0{,}018} = \underline{0{,}6667}.$$

****

10º) Las notas del examen de Matemáticas II de la EBAU siguen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 1,5. Se elige al azar un alumno de Matemáticas II de la EBAU:

a) Calcular la probabilidad de que un alumno haya aprobado (≥ 5).

b) Calcular la nota que tiene que sacar un alumno para que su nota sea superior al 97,50 % de las notas.

----

a)

$Datos$: $\mu = 6{,}5$; $\sigma = 1{,}5$.

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(6{,}5;\ 1{,}5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-6{,}5}{1{,}5}$.

$$P = P(X \geq 5) = P\left(Z \geq \frac{5-6{,}5}{1{,}5}\right) = P\left(Z \geq \frac{-1{,}5}{1{,}5}\right) = P(Z \geq -1) = P(Z < 1) =$$

$= \underline{0{,}8413}$.

b)

Se debe hallar γ tal que: $P = P(X < \gamma) = 0{,}9750 \Rightarrow P\left(Z < \frac{\gamma-6{,}5}{1{,}5}\right) = 0{,}9750$.

Mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$ a 0,9750 le corresponde 1,96:

$\frac{\gamma-6{,}5}{1{,}5} = 1{,}96$; $\gamma - 6{,}5 = 2{,}94$; $\gamma = 6{,}5 + 2{,}94 = 9{,}44$.

$$\underline{El\ alumno\ tiene\ que\ sacar\ una\ nota\ de\ 9{,}44.}$$

****